UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE — FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

N° d'ORDRE : 60

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÉS SCIENCES

(Physique)

PAR

F.-M. CAMIA

CONDUCTION DE LA CHALEUR ET ANALOGIES HYDRODYNAMIQUES

SOUTENUE LE 10 AVRIL 1956, DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

composée de MM. P. ROUARD, Président

R. MERIGOUX, E. CALVET Examinateurs

Permis d'imprimer le 20 Mars 1955.

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE — FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

N° d'ORDRE : 60

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÉS SCIENCES
(Physique)

PAR

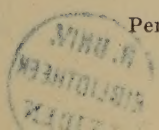
F.-M. CAMIA

CONDUCTION DE LA CHALEUR ET ANALOGIES HYDRODYNAMIQUES

SOUTENUE LE 10 AVRIL 1956, DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

composée de MM. P. ROUARD, Président
R. MERIGOUX, Examinateurs
E. CALVET

Permis d'imprimer le 20 Mars 1955.



40/63

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE

Mort au Champ d'Honneur :
M. F. MARTY, Maître de Conférences de Mathématiques, (14 Juin 1940).

Doyens et Professeurs Honoraires :
MM. MARCHAUD, E. TRAYNARD.

Professeurs Honoraires :
MM. M. CAULLERY, J. PERES, G. PETIT, J. BOSLER, M. KOLLMANN, R. THIRY, A. TIAN.

Maîtres de Conférences Honoraires :
MM. BIMAR, D. RICARD.

Doyen :
M. P. CHOUX.

Assesseur :
M. P. ROUARD.

Secrétaire Principal :
M. C. MOYNAULT.

PROFESSEURS :

MM.	L. MARGAILLAN	Chimie Industrielle.
	G. CORROY	Géologie et Minéralogie.
	P. CHOUX	Botanique Générale.
	R. CERIGHELLI	Agronomie Tropicale.
	J. VALENSI	Mécanique des Fluides.
	P. ROUARD	Physique Générale.
	P. DESNUELLE	Chimie Biologique.
	M. ABELOOS	Zoologie Générale.
	R. MERIGOUX	Physique Industrielle.
	P. VINCENSINI	Calcul Différentiel et Intégral.
	E. CALVET	Chimie Générale.
	P. BENOIT	Physiologie.
	C. FEHRENBACH	Astronomie.
	A. FAVRE	Mécanique de l'Atmosphère.
	H. CABANNES	Mécanique Rationnelle.
	A. GUILLEMONAT	Chimie M. P. C.
	J. - M. PERÈS	Biologie Animale S. P. C. N.
	C. JAUSSERAN	Physique M. P. C.
	R. MOLINIER	Biologie Végétale.
	G. CARPENI	Chimie S. P. C. N.
	P. COTTON	Physique P. C. B., S. P. C. N.
	J. METZGER	Chimie P. C. B.
	J. TIMON-DAVID	Biologie Animale P. C. B.
	L. FOURÈS	Mathétiques Générales.
Madame	Y. FOURÈS	Méthodes Mathétiques de la Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M.	G. BODIOU	Mathétiques M. P. C.
Mademoiselle	M. GONTCHAROFF	Biologie Marine.
MM.	M. NAUDET	Chimie des Corps Gras.
	D. MALÉ	Physique Générale.
	R. ACHER	Chimie Biologique.

CHARGES DE CONFERENCES

M.	G. MALCUIT	Botanique Appliquée.
Madame	S. TAXY-FABRE	Géographie Physique et Géologie Appliquée.
MM.	B. GOUZON	Physiologie.
	C. GOUVERNET	Géologie.
	J. MORIN	Physiologie Générale.
	DELPECH	Psychologie.
	CHARLIER DE CHILLY	Mathématiques.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

CONDUCTION DE LA CHALEUR ET ANALOGIE HYDRODYNAMIQUES

par F. M. CAMIA

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été entrepris pour nous préciser le problème de la Diffusion de la Chaleur dans les solides et nous en faciliter la solution. Le mode de calcul auquel nous avons été conduit permet une résolution assez facile de problèmes complexes, malgré son abord compliqué. Il s'est révélé valable pour des travaux ultérieurs ; en sorte que, sans vouloir négliger les démonstrations apportées par cette Thèse, nous considérons bien plutôt cette dernière, au premier chef, comme une *Introduction* à une Thermocinétique pratique, ou de façon plus générale, à une Dynamique de la Diffusion. Le domaine d'application est ample. Aussi engageons-nous le lecteur à ne pas se laisser rebuter par l'aridité de certaines pages ; aucune n'est vraiment difficile. Et, même, point n'est besoin de parcourir tout l'appareil mathématique pour saisir l'essentiel.

Nous voudrions ici remercier nos Supérieurs qui ont encouragé notre tâche, et tous ceux qui nous ont aidé. A cet égard, deux noms s'inscrivent en premier lieu : Monsieur Jean Bosler, membre correspondant de l'Institut, est à l'origine de tout et nous a initié aux premiers éléments du Problème de la Chaleur; M. E. Calvet, professeur de chimie générale à la Faculté des Sciences et directeur du Laboratoire de Microcalorimétrie [1], nous a accueilli avec cordialité dans son Laboratoire, et ses directives ont été combien précieuses pour l'élaboration de notre travail.

M. le Doyen P. Choux nous a facilité la reprise de notre activité scientifique. M. P. Rouard, professeur de Physique Générale, a bien voulu non seulement accepter la présidence du Jury mais encore nous aider de ses conseils, ainsi que M. R. Mérigoux,

(1) Prochainement transformé en Institut.

professeur de Physique Industrielle et directeur du Laboratoire d'Essais. M. le Professeur J. Valensi, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides, nous a permis de puiser inconditionnellement dans sa bibliothèque, ainsi que M. le Professeur L. Margaillan, Directeur de l'Ecole de Chimie, et M. F. Canac, Directeur du C.N.R.S.

Nous tenons aussi à souligner la serviabilité du personnel de la Bibliothèque de la Faculté des Sciences, de la Bibliothèque de l'Ecole d'Ingénieurs et de la Société Scientifique de Marseille. M. le Professeur A.-D. Moore, de l'Université de Michigan, et M. M.-B. Coyle, Ingénieur à la Metropolitan Vickers Electrical C°, nous ont obligeamment communiqué leurs travaux.

Enfin, M. le Doyen G. Corroy nous a aimablement assuré la publication du présent travail en nous accordant l'hospitalité des Annales de la Faculté.

A tous, nous tenons à dire notre profonde gratitude.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE

BIBLIOGRAPHIE

1. — La liste ci-dessous est celle des articles ou des ouvrages que nous avons consultés ou dont nous avons eu une analyse. Dans ce dernier cas nous citerons la référence de cette analyse.

Pour abréger les notes en cours d'exposé nous nous contenterons d'indiquer le nom de l'auteur, et, s'il y a lieu, la page ; il est entendu qu'un nom d'auteur se retrouvera facilement dans la liste ci-dessous accompagné du nom de l'ouvrage, du titre de l'article et de toutes références utiles. Dans le cas où le même auteur est recensé plusieurs fois dans la bibliographie, un numéro d'ordre dissipe toute équivoque.

Ainsi :

* Estermann renvoie à : I. Estermann and J.E. Zimmermann, Journal of Applied Physics Volume 23 N° 5 Mai 1952, page 578 seq., article « Heat Conduction in Alloys at low temperatures ».

* Moore II, page 799, renvoie à : A.D. Moore, article « Fields from Fluid Flow Mappers » Journal of Applied Physics, Volume 20, Août 1949, page 799.

Quand la citation d'une revue revient souvent, nous la nommons in extenso la première fois, puis en abrégé, de manière cependant qu'il n'y ait pas confusion.

2. — LISTE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS

Adams (William H. Mc) 1. — Transmission de la chaleur. Traduction française par J. Boudrot, Dunod, Paris 1950.

* 2. — Heat Transmission - Mc Graw Hill, New York - Londres, 2e édition 1951.

Anthony (M.L.). — « Temperature Distributions in Slabs with

a Linear Temperature Rise at one Surface ». Proceedings of the General Discussion-Heat Transfer, I. Mech. Eng., London, 1951, page 250 seq.

AWBERY (J.H.). — « Heat Flow when the Boundary Condition is Newton's Law ». J. Philosophical Magazine London, vol. 7°, seventh series, janvier-juin 1929.

BAKHMETEFF (Boris A.). — Mécanique de l'écoulement turbulent des fluides. Traduction par A. JORISSEN, DUNOD, 1941.

BAULE (Bernhard). — Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Verlag von S HIRZEL, Zürich, 3e édition 1947. Tome 6 : Partielle Differentialgleichungen.

BICKEL. — « Sur l'écoulement bidimensionnel de la chaleur au voisinage d'une arête de coupe ». Microtecnic (Suisse). Vol. 7, année 1953, N° 3, pages 134-135. Recension du C.N.R.S. (Bulletins Analytiques, vol. XV, N° 1. Première partie 1954, N° 1304).

BLANC (André). — « Application du Théorème de THEVENON aux problèmes de transmission de la chaleur ». Comptes Rendus de l'Académie. Tome 235, N° 2, 16 juillet 1952, pages 136-138.

BOUASSE (H.).

* 1. — Enroulements liquides et pertes d'énergie périodique. Chaleur et Industrie, N° 335, Juin 1953.

* 2. — *Ibid.*, N° 336, Juillet 1953.

* 3. — *Ibid.*, N° 337, Août 1953.

* 4. — *Ibid.*, N° 338, Septembre 1953.

BOUSSINESQ (J.).

* 1. — Théorie Analytique de la Chaleur. GAUTHIER et VILLARS, Paris, 1901, Tome 1.

* 2. — *ibid*, 1903, Tome 2.

* 3. — Cours de physique mathématique de la Faculté des Sciences de Paris. GAUTHIER et VILLARS, Paris 1921, t. 3.

BRADFIELD (K.N.E.) et SOUTHWELL (R.V.). — « Relaxation Methods applied to Engineering Problems ». Proceed. of the Royal Soc. London, volume CLXI, 15 juillet 1937, pages 155-181.

BRINKMANN (H.C.). — « Heat effects in capillary flow ». Applied Scientific Research. Martinus NIJHOFF, the Hague, Holland, Année 1951, Volume A2, pages 120 seq.

BRONZO (J.A.) et COHEN (H.G.). — « A note on Analog Computer Design. » The review of Scientific Instruments N. Y. vol. 20, N° 2, février 1949.

Brown (S.C.). — « Count Rumford's Concept of Heat ». Americ. Journ. Phys. 1952. Volume 20, N° 6, pages 331-334 ; recensé par le Bulletin du C.N.R.S., vol. XIV, 1953, N° 1, 1re partie, 14-1468.

Cadiergues (R.). — « Physique et Géométrie des échanges par rayonnement ». Chaleur et Industrie, N° 330, janvier 1953, pages 17 seq.

Calvet (Edouard).

* 1. — « Nouvelle Méthode d'Etude de la Diffusion dans les liquides. Mesure des coefficients de diffusion ». C. Rendus 220, 23 avril 1945, pages 597-599.

* 2. — « Diffusion dans les liquides. Obtention directe du réseau des courbes f (x, t, c) = o ». C. R. 221, 1945, pages 403-405.

Cann (G.D. Mc), Wilts (C.H.) and Locanthi (B.N.). — « Electronic Techniques Applied to Analogue Methods of Computation ». Proceedings of the Institute of Radio Engineers New York, Vol. 37, N° 8, août 1940, pages 954 seq.

Clarke (Loyal). — Manual for Process Engineering Calculations Mc Graw Hill 1947.

Coyle (M.B.).

* 1. — « An air flow analogy for the solution of transient heat conduction problems ». Reprint from : « The British Journal of applied Physics », Volume 2, pp. 12-17, janvier 1951.

* 2. — « The Solution of transient Heat Conduction Problems by Air Flow Analogy ». Proceedings of the Gl. Discussion on Heat Transfer I. M. E. London 1951, pages 265 seq.

Davis (Calvin Victor). — Handbook of Applied Hydraulics, Mc Graw Hill, New York, first Edition, sixth impression, 1942.

Decharme (G.).

* 1. — Accusé de réception. Comptes rendus Ac., N° 83, 6 novembre 1876, page 853.

* 2. — *Ibid.*, N° 83, 4 décembre 1876, page 1088.

* 3. — *Ibid.*, N° 85, 24 décembre 1877, page 1242.

* 4. — « Comparaison entre le mode de propagation de l'Electricité et celui de la chaleur ». Revue « La lumière électrique », 6e Année, Tome 13, N° 33, août 1884, pp. 241-247.

Dubois (Maurice). — « Jets gazeux sensibles aux sons et aux

ultra-sons ». Publications Scientif. et Techn. du Min. de l'Air, N° 249, 1951.

Duclaux (J.). — Diffusion dans les liquides. Hermann et Cie 1936 (Collection Actualités Scientif. et Indust. N° 349).

Eckert (E.R.G.). — Introduction to the transfer of Heat and Mass. Mc Graw Hill 1950.

Estermann (I.) and Zimmerman (J.E.). — « Heat Conduction in Alloys at Low Temperatures ». Journ. of Applied Physics. Vol. 23, N° 5, mai 1952, pages 578 seq.

Fabry (Charles). — Propagation de la chaleur. Armand Colin, Paris 1949.

Fisher (J.C.). — « Calculation of Diffusion Penetration. Curves for surface and Grain Boundary ». J. of. Ap. Phys. Vol. 22, N° 1, janvier 1951, pages 74 seq.

Goldberg (Edwin A.) and Brown (Georges W.). — « An Electronic Simultaneous Equation Solvers ». J. of Appl. Phys. Vol. 19, avril 1948, pages 339 seq.

Goursat (Edouard).

* 1. — Cours d'Analyse Mathématique Gauthier Villars, Paris 4e Edition, sans millésime (1924 ?), Tome 1.

* 2. — *Ibid.*, Tome 2.

* 3. — 3e Edition, 1923, Tome 3.

Granier (Jean). — Introduction à l'Etude des Champs Physiques. Dunod 1941.

Grillet (Léon). — « Anomalie de dilatation des aciers. Enregistrement graphique des courbes de dilatation ». Bulletin de la Soc. Sc. de Bretagne, année 1950 paru en 1952. Tome XXV, fascicules 1, 2, 3, 4, page 145 seq.

Groen (P.). — « Eigenvalues Problems in Connection with the Study of Certain hydrodynamical or quantum mechanical Wave Phenomena ». Applied Scientific Research ; Edit. Martinus Nyhoff. The Hague (Hollande) 1951, Section A, Vol. 1, page 225.

Groot (S.R. de). — Thermodynamics of irreversible Processes. North Holland Publishing C°, Amsterdam 1951.

Guichemerre (A.). — « Transport de la chaleur ». Cours d'enseignement supérieur de chauffage industriel édité par Chaleur et Industrie 1950. Pages 145 seq.

Guittard (J.).

* 1. — « Etude théorique de mouvements vibratoires avec

obstacles et discontinuités ». Revue Acoustica, Zürich, Vol. 3, N° 1.

* 2. — *Ibid.* Vol. 3, N° 5.

Hablutzel (E.). — « La loi de similitude appliquée aux problèmes d'écoulement, son contrôle par l'essai et son utilisation en construction mécanique ». Revue Sulzer 1947, N° 1, pages 15 seq.

Hahn (E.). — « Méthode Expérimentale pour la résolution des équations du mouvement des fluides ». Revue Générale de l'Electricité. Tome 21, N° 13, 26 mars 1927, p. 485 seq.

Haller (P. de). — « Application de l'Analogie Electrique à l'étude des grilles d'aube ». Revue Sulzer 1947, N° 3-4, p. 11 seq.

Hayes (J.G.) and Vickers (T.). — « The Fitting of Polynomals to Unequally-Spaced Data ». The Philosophical Magazine, Vol. 42, pages 1387-1400, décembre 1951.

Hodgmann (Ch. D.) et une équipe. — Handbook of Chemistry and Physics. Chemical Rubber Publishing C°, N.Y, 35e Edition 1953-1954.

Hofbauer (G.). — « Waermeschutztechnische Modellversuche ». Masch. Bau. Waermewirtsch. Wien 1951, vol. 6, N° 9, pages 145-148. Recensé et analysé par le Bulletin An. du C.N.R.S., vol. XIII, 1952.

Humbert (Pierre). — Le Calcul Symbolique. (Publication Actualités Sc. et Indust. N° 147), Hermann et Cie Paris 1934.

Ingersoll (L.R.) and Zobel (O.J.). — An Introduction to the Mathematical Theory of the Heat Conduction, Gin and C°, Boston 1913 (ouvrage épuisé).

Ingersoll (L.R.), Zobel (O.J.), Ingersoll (A.C.) — Heat Conduction with Engineering and Geological Applications. Mc Graw Hill, 1948.

Ingersoll (L.R.). — « Modern Applications of an old theory ». Americ. Jour. Physics, 1953. Tome 21, N° 4, page 321. Recensé et analysé par le Bulletin An. du C.N.R.S. Vol XIV 1953 - N° 14-57912.

Jacq (Jean). — « La méthode d'intégration graphique de Binder et Schmidt, etc.... » C. R. Ac. Tome 132, 28 mars 1951, page 1292 seq.

Jost (W.). — Diffusion in Solids, Liquids, Gases. Academic Press Inc. Publishers, N. Y., 1952.

Kammerer (Albert). — Recherches sur la photoélasticimétrie. Col

lection Actualités Scientif. et Industr. N° 960, Hermann et C^ie, 1944.

Kayan (Carl F.). — « Heat Exchanger Analysis by Electrical Analogy Studies ». Proceedings of the Gl Discuss. on Heat Transfer I.M.E. London 1951, page 227 seq.

Korn (G. A.). — « Stabilization of Simultaneous Equation Solvers ». *Proceedings of the I. R. E.*, vol. 37, n° 9, Sept. 1949, p. 1 000 seq.

Kouskoff (Georges).

* 1. — « Champs électrique et magnétique dans une encoche de machine électrique, etc. ». *Revue Générale de l'Electricité*, t. 49, Mars 1941, p. 173-188.

* 2. — « Impédance de conducteurs à section trapézoïdale logés dans une encoche de machine électrique ». *Ibid.*, t. 51, mars 1942, p. 203-217.

* 3. — « Impédances des cages multiples symétriques de moteur asynchrones ». *Ibid.*, t. 56, mai 1947, pp. 227-235.

Laclemandière (J. de). — « Etude Expérimentale de la Transmission de la Chaleur en Régime variable à l'aide de la Méthode des Analogies Electrique et Thermique ». *Cours d'Enseignement Supérieur de Chauffage Industriel.* Edition Chaleur et Industrie, Paris 1950 (donne environ 650 références sur les questions connexes).

Lehmann (Th.).

* 1. — « Détermination graphique des champs magnétiques laplaciens et tourbillonnaires à lignes de flux planes ». *Revue Générale de l'Electricité*, t. 14, 15 septembre 1923, p. 347-357.

* 2. — Suite du même article. *Ibid.*, t. 14, 22 septembre 1923, p. 395 seq.

* 3. — « Spectres Ferromagnétiques ». *Ibid.*, t. 19, 9 janvier 1926, p. 43 seq.

* 4. — Suite du précédent. *Ibid.*, t. 19, 16 janvier 1926, p. 85 seq.

* 5. — « La détermination des champs magnétiques partiels et résultats dans les dynamos saturées ». *Ibid.*, t. 22, 24 décembre 1927, p. 1105 seq.

Lowell (Hermann H.). — « Réponse of Two Matérial Laminated Cylinder to Simple Harmonic Environment Temperature Change ». *J. of. Appl. Phys.*, vol. 24, n° 12, décembre 1953, p. 1473.

MALAVARD (Lucien).

* 1. — « Sur le problème fondamental concernant l'aile d'envergure infinie ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 195, 2 novembre 1952, p. 733.

* 2. — « La Méthode des Analogies Electriques pour le calcul de la correction des parois ». *C. R. 204,* 5 avril 1937, p. 1052-1054.

* 3. — « L'Analogie Electrique comme Méthode Auxiliaire de la photoélasticité ». *C. R. 206,* 4 janvier 1938, p. 38-39.

* 4. — Pour le calcul des effets de fuselage et des fuseaux-moteurs sur la répartition en envergure des efforts aérodynamiques. *C. R. 215,* 5 octobre 1942, p. 266.

* 5. — « Sur la solution rhéoélectrique de questions de représentation conforme et application à la théorie des profils d'aile ». *C. R. 218,* 17 janvier 1944, pp. 106-108.

MALAVARD (Lucien) et SIESTRUNCK (R.).

« Sur l'étude, par l'expérimentation analogique, de grilles rectilignes de profils quelconques ». *C. R. 220,* 4 juin 1945, p. 810-812.

MARCHAUD (Robert). — « De la construction moderne de Transformateurs de grande puissance ». *R. Gle Elect.,* t. 13, n° 26, 30 juin 1923, p. 1079 seq.

MATTAROLO (L.). — « Metodo per la determinazione della diffusivita termica dei cattivi conduttori del calore ». *Revue il Nuovo Cimento,* vol. VII, 9° série, n° 5 bis, 15 octobre 1950, p. 809-815.

MIGNOT (Noël).

* 1. — « Sur les solutions numériques du problème de la chaleur ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 236, 4 mai 1953, p. 1735.

* 2. — « Sur les solutions numériques du problème de la chaleur (suite) ». *C. Rendus,* t. 236, n° 25, 22 juin 1953, p. 2375.

MILES (John W). — « Heat Conduction along an experimental Bar ». *Journ. of. Applied Phys.,* vol. 23, n° 3, mars 1952, p. 372.

MITCHEL (A. R.). — « Round-off Errors in the Solution of the Heat Conduction Equation by relaxation Methods ». *Applied Scientific Research,* Ed. Martinus Nyhoff, The Hague (Holland), 1953, sect. A, vol. 4, n° 2, p. 109.

MIZUSHINA (Tokuro). — « Analogy between Fluid-Friction and Heat Transfer in Annuli ». *Proceedings of the Gl. Disc. on Heat transfer by the I.M.E.,* London, 1951.

MOORE (A. D.).

* 1. — « The Hydrocal ». *Industrial and Engineering Chemistry,* vol. 28, année 1936, p. 704 seq.

* 2. — « Fields from Fluid Flow Mappers ». *Journal of Appl. Phys., vol.* 20 août 1949, p. 790-804.
* 3. — « Soap Film and Sandbed-Mapper Techniques ». *Preprint du 27 mars 1950, pour être publié au Meeting of Am. Society of Mech. Ingeneers, St. Louis U. S. A.,* 19-23 juin 1950.
* 4. — « Four Electromagnetic Propositions with Fluid Mapper Verification ». *Reprint from Electrical Engineering,* n° de juillet 1950, U. S. A.
* 5. — « The further Development of Fluid Mappers ». *Preprint* pour être publié par Transaction of the *Am. Institut. of Elect. Engineers N.Y.,* vol. 69, année 1950.
* 6. — « Mapping Techniques Applied to Fluid Mapper Patterns ». *Preprint from A.I.E.E. Transaction,* vol. 71, 1952.
* 7. — « A new Property of 2-Dimensional Fields ». *Preprint Transanctions of the A.I.E.E.,* sans référence au n° de la parution, imprimé en novembre 1952.

Morse (Philip M.) and Feshbach (Herman). — Méthods of theoretical Physics Mc Graw Hill N. Y., 1953.

Musson-Genon (René). — « Résolution de certaines équations aux dérivées partielles au moyen de la cuve électrolytique ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 222, 28 janvier 1946, p. 274.

Nasse (Gilbert). — « Sur les lois générales du circuit de régulation et leur comparaison à celles du circuit électrique ». *C. Rendus 224,* 17 mars 1947, p. 788-790.

Ollivier (H.).
* 1. — Cours de Physique Générale. *Paris Hermann,* t. 1, année 1927.
* 2. — Idem, t. 2, année 1923.
* 3. — Idem, t. 3, année 1923.

Parodi (Maurice). — Equations intégrales et Transformation de Laplace. *Publications Scientif. et Tech. du Ministère de l'Air,* n° 242, année 1950.

Peclet (E.). — Traité de la Chaleur considérée dans ses applications ». *Hachette, Paris,* 1843.

Peres (J.) et Malavard.
* 1. — « Sur les analogies Electriques en Hydrodynamique ». *Comptes-Rendus Ac. Sc.,* t. 194, 18 avril 1932, p. 1315.
* 2. — « Tracé des lignes de courant dans l'écoulement d'Oseen

autour d'un cercle ». *C. Rendus,* t. 194, 2 mai 1932, p. 1560.

* 3. — « Application de la méthode électrique à un problème concernant l'aile d'envergure infinie ». *C. Rendus,* t. 195, 10 octobre 1932, p. 599.

* 4. — « Réalisations analogiques d'écoulement avec lignes de jet ». *C. Rendus,* t. 206, 7 février 1938, p. 419.

Peyches (Ivan). — « Les Isolants Thermiques » dans : « Les Hautes Températures et leurs utilisations en chimie ». *Encyclopédie publié sous la direction de M. P. Lebeau et F. Trombe,* Masson et Cie 1950, t. 2, p. 1322 seq.

Pierre (L). — Cours de Physique Industrielle, *Albin Michel,* 1926.

Plesset (M. S.) and Zwick (S. A.). — « A nonsteady Heat Diffusion Problem with Spherical Symmetry ». *J. Appl. Phys.,* vol. 23, n° 1, janvier 1952, p. 95.

Podolsky (René). — « A problem in Heat Conduction ». *J. Appl. Phys., vol.* 22, n° 5, mai 1951, p. 581.

Poincaré (Henri). — Théorie Analytique de la propagation de la Chaleur. *Georges Carré éditeur,* Paris, 1895.

Popoff (Kyrille).

* 1. — « Sur les relations phénoménologiques d'Onsager ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 235, n° 13, 29 septembre 1952, p.649.

* 2. — « Sur l'échange de chaleur par conduction d'un système à un autre ». *C. Rendus 236,* n° 8, 23 février 1953, p. 785-786.

* 3. — Sur la conduction de la chaleur dans une barre homogène. *C. Rendus 236,* n° 17, p. 1640-1641.

Popovitch-Schneider (Madame V.). — « Sur l'extension de la méthode de Hele-Shaw aux mouvements cycliques ». *C. Rendus 192,* 29 juin 1931, p. 1703 seq.

Porter (A.) et Mack (C.). — « New Methods for the numerical Solution of Algebraic Equations ». *The Philosophical Magazine,* vol. 40 Seventh Series 1949, p. 578-585.

Prandtl (Ludwig).

* 1. — Essentials of Fluid Dynamics (Traduction anglaise). *Blackie & Son,* London, 1953.

* 2. — Traduction Française d'Albert Monod. *Dunod,* Paris, 1940.

Profos (P.). — « Appareil de Laboratoire pour l'étude des phénomènes de réglage ». *Revue Technique Sulzer,* année 1948, n° 3, p. 23-27.

Price (P.H.). — « Unsteady Heat Flow ». *Proceedings of Gl. Discussion on Heat Transfer I.M.E.,* London, 1951, p. 281 seq.

Riabouchinsky (Dimitri).

* 1. — « Sur les différentes formes de mouvement pouvant être reproduites par le procédé des filets colorés entre deux surfaces, parallèles ou non, suffisamment rapprochées ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 193, 19 octobre 1931, p. 645.

* 2. — « Mouvement d'un fluide incompressible autour d'un obstacle. » *C. Rendus,* t. 193, 11 avril 1932, p. 1215.

* 3. — « Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible ». *C. Rendus,* t. 195, 28 novembre 1932, p. 998-999.

* 4. — « Quelques nouvelles remarques sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible ». *C.eRendus,* t. 199, 1er octobre 1934, p. 633.

Rich (George R.). — Hydraulic Transients — Mc Graw Hill. N. York, first édition 1951.

Roche (Edouard). — Application de la notion d'échauffement relatif à l'étude de la convection forcée de la chaleur. *Publication Scient. et Tech. du Ministère de l'Air,* n° 267, année 1952.

Rodier (Georges). — « Méthode permettant d'obtenir par un procédé électrolytique une représentation de la densité électronique à l'intérieur d'une molécule ». *C. Rendus Ac. Sc.,* 10 février 1947, p. 391.

Rousseau (Edmond). — « Détermination du coefficient de conductibilité thermique des métaux. » *Revue Chimie et Industrie,* vol. 67, n° 2, février 1952, p. 242 seq.

Salomon (B.).

* 1. — « Sur les analogies gyroscopiques des machines électriques synchrones et asynchrones et sur la transposition en mécanique de certains diagrammes de l'électrotechnique. » *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 176, 5 mars 1923, p. 661.

* 2. — « Sur les analogies gyroscopiques de l'électricité ; appareils gyroscopiques asynchrones et applications à la théorie du gyroscope à mouvement continu ou à mouvement alternatif. » *C. Rendus A. S.,* t. 186, 6 février 1928, p. 358-360.

* 3. — « Sur les analogies gyroscopiques de l'induction mutuelle et des fuites magnétiques ». *C. Rendus A. S.,* t. 189, 26 août 1929, p. 354-356.

* 4. — « Sur certaines classes de réducteurs d'oscillation des arbres de machine ». *C. Rendus A. S.,* t. 203, 14 décembre 1936, p. 1315.

Schlinger (W. G.), Berry (V. J.), Mason (J. L.) and Sage (B. H.). — « Prediction of Temperature Gradients in Turbulent Streams ». *Proceedings of Gl. Discussion on Heat Transfer I. M. E.,* London, 1951.

Schmidt (Ernst H. W). — Heat Transfer in Gun Barrels. *Ibid.,* p. 263.

Schneider (P.J.). — « Numerical Method for Porous Heat Sources ». *J. Applied Phys.,* vol. 24, n° 3, mars 1953, p. 271.

Schofield (F. H.). — « The Steady Flow of Heat from certain objects buried under Flat Air-Cooled Surfaces ». *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* London, vol. 31, Seventh Series, 1941, p. 471.

Senarmont (H. de).

* 1. — « Mémoire sur la conductibilité des substances cristallines pour la chaleur ». *C. Rendus A. S.,* t. 25, 27 septembre 1847, p. 459-461.

* 2. — « Seconde mémoire sur la conductibilité, etc. ». *C. Rendus,* t. 25, 15 Novembre 1847, p. 707-710.

Shortley (George), Weller (Royal), Darby (Paul) and Gamble (Edward E.). — « Numerical Solution of Axisymmetrical Problems with Applications to Electrostatics and torsion » *J. Applied Phys. Vol.* 18, Janvier 1947, p. 116.

Siestrunck (Raymond).

* 1. — « Les relations de Symétrie dans le problème de l'hélice; application aux répartitions optimum ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 219, 31 juillet 1944, p. 151.

* 2. — « Sur une méthode d'adaptation des hélices à pas fixe réalisant une perte d'énergie minimum pour plusieurs régimes de fonctionnement »: *C. Rendus 219,* 4 septembre 1944, p. 253.

* 3. — « Sur un mode de solution rhéoélectrique des problèmes de l'hélice propulsive ». *C. R.* 218, 30 Octobre 1944, p. 411-413.

* 4. — « Sur les corrections de parois dans les essais d'hélices ». *C. R.* 221, 10 Septembre 1945, p. 284-286.

Southwell (R. V.). — « Stress Calculation in Frameworks by the Method of Systematic Relaxation of Contraints ». *Proceedings of the Royal Soc. of London,* serie A vol. CLI, n° 872, 1er août 1935, pages 56-95.

Squire (William). — « A Problem in Heat Conduction ». *Jour. of Applied Phys.* vol. 22, n° 12, Décembre 1951, p. 1508.

Storm (M. L.). — « Heat Conduction in simple Metals ». *Journ. of Applied Phys.*, vol, 22, n° 7, Juillet 1951.

Taylor (G. I), and Sharman (C. F.). — « A mechanical method for solving Problems of Flow in Compressible Fluide ». *Proceed. of the Royal Soc. of London,* Série A, vol. 121, année 1928, p. 195-217.

Techniques de l'Ingénieur. — Fiches sous la Direction de C. Monteil, Edition Techniques de l'Ingénieur Paris — (Tenues au courant jusqu'en 1954).

* 1. — Fiche A 250-2 Viscosité.
* 2. — Fiche A 575-11 Conductibilité thermique.
* 3. — Fiche A 575-13 Courbe erf x.
* 4. — Fiche A 585-1 et 2 Régime thermique permanent.
* 5. — Fiche A 585-9 Theorème de Nessi-Nisolle.
* 6. — Fiche A 700-7 Ecoulements laminaires.
* 7. — Fiche B 170-6 Conduction calorifique; interprétation cinétique.

Traupel (W.).

* 1. — « Calcul de l'écoulement potentiel d'un fluide dans une grille d'aubes ». *Revue technique Sulzer,* 1945, n°1, p. 25 seq.
* 2. — « Contribution à la théorie de l'écoulement potentiel à travers une grille d'aubes ». — *ibid.,* 1948, n° 2, p. 12 seq.
* 3. — « Phénomènes transitoires d'écoulement de chaleur dans les plaques, cylindres et sphères ». — *Ibid.,* 1949, n° 3, p. 12-23.

Ullmann (Fritz). — *Enzyklopädie der Technischen Chemie.* Urban und Schwarzenberg, Berlin 1930.

* 1. — Vol. 1 — Article « Abdampfen » p. 14-16.
* 2. — Vol. 6 — Article « Isolierung ».

Valiron (Georges). — *Cours d'Analyse Mathématique — Equations fonctionnelles. Applications.* Masson et Cie, 1945.

Vasileff (H. D.). — « On the Calorimetric Heat Exchange Correction ». *Journ. of Applied Phys.,* vol. 23, n° 9, Sept. 1952.

Vernotte (Pierre).

* 1. — « A propos d'une vérification du critère de Rayleigh ». *C. Rendus Ac. Sc.,* t. 206, n° 1 (1938). Séance du 27 Décembre 1937, p. 46-49.
* 2. — « Le partage du Flux de Chaleur dans les Méthodes du double mur ». *C. R.* 206, n° 1, 4 Février 1938, p. 505.

* 3. — « Une solution nouvelle des Problèmes de la Chaleur permettant d'étudier dans tous les sens le début de la propagation ». *C. R.* 206, n°1, 21 Février 1938, p. 590.

* 4. — « Détermination pratique de la conductibilité thermique des métaux en valeur relative ». *C. R. 206,* n° 1, 21 mars 1938, p. 996.

* 5. — « Propriétés de la Solution de Fourier dans les Systèmes complexes. Application au partage d'un Flux entre Corps en contact ». *C. R.* 206, n° 1, 2 Mai 1938, p. 1286.

* 6. — « La correction des pertes latérales dans la méthode du mur ». *C. R.* 217, n° 2, 27 Septembre 1943, p. 291.

* 7. — « Valeur, à l'extérieur d'un système matériel, de la Série de Fourier, représentant une distribution initiale des températures à l'intérieur de ce système ». *C. R. 217,* n° 2, 18 octobre 1943, p. 364.

* 8. — « Formes diverses de l'Equation de la Chaleur. Equation Intrinsèque ». *C. R.* 218, n° 1, 4 Janvier 1944, p. 39 seq.

* 9. — « La loi de la Convection naturelle. Les divers régimes de convection ». *C. R.* 219, 27 Décembre 1944, p. 675-677.

*10. — « Application pratique de la loi de convection naturelle. Pourquoi l'expérience semblait vérifier la loi approchée classique ». *C. R.* 220, 12 Mars 1945, p. 354-356.

Vigoureux (P.). — « Sensitivity and impedance of Electro-Acoustic Transducers ». *The Proceed. of the Physical Soc.,* vol. 59, part 1, 1er Janvier 1947, p. 331 seq.

Virgitti (Jean). — « Sur la détermination rhéographique de la forme à donner aux collecteurs de haute tension ». *C. R.* 207, 11 Juillet 1938, p. 129.

Walker (R. M.). — « An Analogue Computer for the Solution of Linear Simultaneous Equations ». *Proceedings of the I. R.E.,* vol. 37, n° 12, Décembre 1949, p. 1467 seq.

Wang (T. J.). — Mathematics of Radio Communications. Third Edition. D. Van Nostrand C°, N. Y.

Williams (J. C.). — « The solution of Température Distribution Problem by computation and Electrical Analogy ». *British Journal Applied Phys.,* 1952, vol. 3, n° 6, p. 197-199. Recensé et analysé par le *Bulletin Anal. du C. N. R. S.,* vol. 14, 1953, 1er partie, n° 14-20749.

Williamson (Ed.) et Adams (L. M.). — « Etude expérimentale des Flux de chaleur non permanents. » *Rev. Technique Sulzer,*

1939, n° 4, p. 14 seq. (le nom des auteurs n'est pas sur la revue, il est donné par Laclemandière dans l'ouvrage cité).

Wilson (L. H.) and Miles (A. J.). — « Application of the membrane Analogy to the Solution of Heat Conduction Problems ». *Journ. of Appl. Phys.*, vol. 21, n° 6, juin 1950, p. 532-535.

Zatzkis (Henri). — « A Certain Problem in Heat Conduction ». *Journ. of. Appl. Phys.*, vol. 24, n° 7, juillet 1953, p. 895.

Nous tenons à ajouter à cette liste le livre suivant, que nous n'avions pu avoir avant la rédaction de la présente thèse, et qui contient la solution de nombreux problèmes relatifs à la diffusion de la chaleur :

Carslaw (H. S.) et Jaeger (J. C.). — Conduction of heat in solids. *Clarendon Press*, Oxford, 1948.

De même :

Veron (M.). — « Champs thermiques et flux calorifiques. Méthodes graphiques et apparentées ». *Bulletins techniques*, n^{os} 23 et 24 de la Société Française des Constructions « Babcock » et « Wilcox », Paris, 1950-1951. (Cet ouvrage comporte de nombreuses épures et une bibliographie de l'Auteur.)

CHAPITRE I

LES MÉTHODES DE SOLUTION DU PROBLÈME DE LA CHALEUR

1. — Les méthodes mathématiques

Si Newton au 17e siècle et Lambert au 18e siècle ont mis en équations et résolu certains problèmes relatifs à la transmission de la Chaleur, si Biot inaugure le 19e siècle par son Mémoire sur la Propagation de la Chaleur (1804) c'est Fourier qui, découvrant en 1807 sa géniale méthode et l'appliquant en 1822 dans son Traité Analytique de la Chaleur, a fait faire le pas décisif au Problème [1].

Depuis, les plus grands noms des Mathématiques sont attachés à ce problème : Poisson, Laplace, Kirchoff, Duhamel, Lamé, Cauchy [1], Lord Kelvin [2], ... ou à celui des équations qui le résolvent : Schlaefli, Betti, Appel, Volterra par exemple [3]. D'autres noms bien connus nous viennent sous la plume : Boussinesq (Theorie Analytique de la Chaleur [4], Cours de Physique Mathématique [5]), Poincaré (Théorie Analytique de la propagation de la Chaleur [6]), Goursat (Cours d'Analyse Mathématique [7]), Charles Fabry (Propagation de la Chaleur [8]), etc...

Tous les cours d'Analyse ou de Physique ont leurs chapitres sur ce sujet [9]. Signalons les livres plus récents de Carslaw et Jaeger (Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford

(1) Boussinesq I, p. 2 sq.
(2) Ingersoll II.
(3) Goursat III, p. 160 sq.
(4) Boussinesq I - II.
(5) Boussinesq III.
(6) Poincaré.
(7) Goursat II - III.
(8) Fabry.
(9) Goursat III, p. 107, 287, 499, 518, 531 ; Ollivier II, p. 178, etc...

1947) et d'Ingersol, Zobel et Ingersoll (Heat Conduction, 1948) [10], qui continuent la ligne classique.

De nombreux perfectionnements ont permis progressivement des solutions nouvelles ou plus élégantes : Introduction déjà lointaine des fonctions de Bessel [11] avec tables numériques [12] — Méthode des sources [13] avec notion de choc thermique, de sources mobiles [14] — Méthode des doublets [15] — Utilisation des fonctions sphériques [16], des fonctions harmoniques [17], de certaines équations transcendentales [18], du Théorème de Green [19], de la fonction de Kramp [20] liée à la fonction erf (x) appelée aussi $\Phi(x)$ ou $\Psi(x)$ [21] de la fonction Θ de Jacobi [22] — Développement du principe de superposition [23], etc... Assez récemment, l'introduction du calcul symbolique a permis de nombreuses simplifications de calcul [24]. De même, celle de la méthode phénoménologique, appliquée aux phénomènes calorifiques, a jeté des jours nouveaux sur la signification des termes employés et a rendu possible l'insertion du problème dans le cadre de la nouvelle Thermodynamique [25]

Mais, malgré tout ce travail de systématisation et de clarification, la réalité du phénomène échappe encore souvent à l'analyse, surtout dans les cas concrets de plus en plus nombreux, où tantôt les hypothèses relativement simples des mathématiciens ne sont plus vérifiées, tantôt les équations posées mènent à des calculs prohibitifs [26]. D' où l'apparition de nombreuses méthodes auxiliaires destinées à rendre le calcul accessible aux cas concrets. Ces méthodes auxiliaires ont eu comme adjuvant précieux pour le physicien les notions de similitude et d'analogie appliquées aux phénomènes de la physique.

D'où les trois paragraphes suivants : sur les *méthodes auxiliaires*, la *similitude* et *l'analogie*.

(10) Ingersoll II.
(11) Boussinesq I, p. 116. Baule, p. 58 sq, 66 sq. Goursat III, p. 160. Ingersoll II, p. 177 sq.
(12) Ingersoll II, (258-259).
(13) Ingersol II, p. 109 sq. Baule, p. 64. Boussinesq II, p. 157. Blanc.
(14) Podolsky, Squire, Boussinesq II, p. 106.
(15) Ingersoll II, p. 112 sq.
(16) Poincaré, p. 263. Boussinesq I, p. 293, etc...
(17) Poincaré, p. 287, etc...
(18) Poincaré, p. 172 sq. Ingersoll II, p. 169 sq. Traupel (eq. 20), etc...
(19) Tous les classiques.
(20) Boussinesq II, p. 15.
(21) Fabry, p. 97. Ingersoll II, p. 81, 88, 111, 140, 146, 249... et autres auteurs.
(22) Poincaré, p. 93, 97, etc...
(23) *Cf.* Traupel ; voir les classiques.
(24) *Cf.* comme livre d'initiation Humbert, *cf* aussi Carslaw, p. 106 sq, Parodi et aussi Zatzkis, Carson.
(25) de Groot. *Cf.* également Popoff, p. 1, 2, 3.
(26) *Cf.* Moore II, p. 799, Laclémandière, p. 101 sq, Virgitti, Profos, etc..

2. — Les méthodes auxiliaires

Mises à part les méthodes fondées sur l'Analogie, les méthodes actuellement employées comme auxiliaires des méthodes analytiques peuvent se classer en deux groupes : les méthodes numériques et les méthodes graphiques.

Très souvent, les méthodes numériques [27] emploient des équations aux différences partielles finies [28], ce qui équivaut souvent à remplacer un système différentiel par un système d'équations linéaires; d'autres fois l'approximation provient du calcul lui-même. Une méthode de ce genre est actuellement fort employée, c'est la méthode « pas à pas » (the « step method »); elle consiste à diviser à la fois le temps et l'espace en intervalles finis et à supposer que la température reste constante dans les compartiments ainsi délimités [29]. Une autre méthode très intéressante est la méthode de « relaxation » (the « relaxation method ») découverte par Southwell pour d'autres fins [30], et appliquée à la chaleur par Emmons.

Pour la résolution de systèmes d'équations on emploie de très nombreuse méthodes [31] comme aussi les calculateurs électroniques [32].

Les méthodes graphiques sont elles aussi très employées. La plus connue est celle de Schmidt (1922) [33] déjà inventée par Binder en 1911 [34]. On en connait de nombreux exposés ou applications [35]. Mais il existe bien d'autres méthodes graphiques qui s'appliquent à des cas particuliers [36].

Quand le régime calorifique est celui d'un état permanent, on peut définir un champ de températures avec des lignes de flux orthogonales. Pour déterminer la forme de ce champ on peut appliquer tout ce qu'on sait sur les champs à mailles carrées [37].

(27) Fisher, Shortley, etc...
(28) *Cf.* par ex. Mignot.
(29) Schneider, Traupel (Méthode Gröber-Erk). Ingersoll II, p. 216 (références).
(30) Southwell, Bradfield, Mitchel, Ingersoll II, p. 213. Laclémandière, p. 104.
(31) Williams (Méthode de Dusinberre). Hayes. Porter.
(32) Ingersoll II, p. 206. Laclémandière, p. 107 sq. Korn. Mc Cann. Walker. Goldberg.
(33) Mc Adams, p. 43 sq. Laclémandière, p. 102 sq. Ingersoll II, p. 209
(34) Ingersoll II, 210. Laclémandière, p. 123.
(35) Ingersoll II, p. 211. Jack, Ingersoll III.
(36) Peyches. Techniques V.
(37) Granier. Lehman I, II, III, IV, V. Ingersol II, p. 200 sq. R. Marchand. Moore VI.

A ces méthodes peuvent se rattacher les abaques, courbes, tables numériques [38], qui aident grandement les ingénieurs dans la pratique.

3. — La similitude

La notion de similitude est employée couramment en science. Elle permet, pour des cas particuliers de réduire les calculs numériques par des *mesures* sur des *modèles* faciles à faire ou relativement peu coûteux. Les *modèles réduits* de locomotives, d'avions, etc... sont bien connus, comme aussi les maquettes hydrauliques [39]. Il est possible, de même, de parler de modèles thermiques réalisables concrètement [40], et, pour l'établissement de ceux-ci, rappelons l'importance de la notion de coefficient de forme [41].

Les conditions de similitude d'un modèle thermique et d'un prototype à une autre échelle seront elles-mêmes traitées plus loin dans le cadre précis de nos expériences. Nous verrons que leur étude déborde amplement les simples problèmes d'utilisation.

4. — Méthodes analogiques

L'Analogie, qui transporte la notion de similitude à des cas d'*espèce différente* permet elle aussi le cheminement de la pensée et répond au grand désir d'unification de l'esprit humain. Les Mathématiques ont permis, sur le plan de la quantité, de déceler des analogies de structure entre des phénomènes disparates sur le plan de la qualité. Ainsi ne doit-on pas s'étonner de voir, bien développée chez des mathématiciens dès la fin du XIX[e] siècle, la notion de l'analogie des phénomènes thermiques avec la diffusion, les frottements, les résistances des liquides, la filtration, les torsions [42]... Cependant, nous l'avons déjà vu, la complication des problèmes concrets défie bien souvent l'analyse. Aussi, les physiciens ont-ils pensé, pour des modèles difficiles à réaliser dans un domaine, à utiliser [43] l'analogie. DECHARME par exemple en 1883 [44] imite par voie hydrodynamique certains effets électriques et compare expérimentalement la propagation de la chaleur dans

(38) INGERSOLL II, p. 208. Voir tables et courbes des ouvrages techniques.
(39) *Cf.* DAVIS, p. 1031. Voir aussi HABLÜTZEL, BOUASSE. *Cf.* aussi KAMERER. (Modèles en verre pour l'étude de l'élasticité).
(40) SENARMONT I et II. BOUSSINESQ II, p. 64. HOFBAUER. BICKEL. GRANIER, p. 221-222. LACLÉMANDIÈRE, p. 110. (Modèles de KAYAN).
(41) FABRY, p. 74 et 152.
(42) *Cf.* BOUSSINESQ I, p. 322 sq ; FABRY, p. 148-149 ; TOKURO MIZUSHINA.
(43) LACLÉMANDIÈRE, p. 105 et suivantes.
(44) DECHARME I, II, III, IV.

une barre avec celle de l'électricité (1884). O. Wiener, en 1893, donne une méthode de mesure des effets thermiques dans les solides par la mesure de la diffusion des liquides dans les liquides [45]. Langmuir, Adams et Meikle, inventent en 1913 la cuve électrolytique qui a eu et a encore des applications en nombre considérable [46]. En 1914, Max Jacob utilise l'analogie magnétique [47]. En 1926, B. Salomon étudie les représentations gyroscopiques de divers phénomènes [48]. En 1924, Relf, Taylor, Sharman et Ferrari présentent l'analogie du champ électrique et du champ aérodynamique [43]. En 1928, Awberry et Shofield figurent la résistance thermique d'un milieu par la résistance d'un gabarit électrique [43] étudié ailleurs par Taylor et Sharman [49]. Prandtl en 1903 avait établi l'analogie entre les équations du film de savon et les équations de la torsion des solides [50]; en 1937, Miles et Stevenson utilisent l'analogie entre les mêmes équations et celles du champ des pressions dans un gaz ou un liquide [43].

En 1952, Brown publie un travail sur les analogies de la chaleur avec les ondes acoustiques [51]. Actuellement, l'analogie entre l'établissement du courant électrique dans un ensemble de conducteurs et de capacités, et l'établissement des états thermiques, est bien connue et a donné lieu à d'innombrables travaux, qui débordent sur d'autres domaines [52]. Faisons ici une mention spéciale du dispositif de M. B. Coyle de la Vickers Co à Londres, qui utilise, pour l'étude de la conduction dans les milieux à conductivité variable, un modèle d'analogie pneumatique auquel nous ferons allusion plus loin [53].

A ces procédés peuvent se rattacher ceux qui par interférence lumineuse rendent visibles les lignes équipotentielles d'un champ, en remplaçant ces dernières par des franges qui leur sont analogues [54], et bien d'autres méthodes encore.

Il nous reste à parler de deux procédés analogiques qui méritent une place à part, comme introduisant directement notre thèse, et qui sont les deux groupes principaux d'analogies hydrodynamiques.

(45) Duclaux, p. 4 et p. 26. *Cf.* Boussinesq I, p. 323.
(46) Fabry, p. 73. Hahn. Granier, p. 202 sq. Pérès. Malavard. Siestrunck. Williamson. Musson. P. de Haller. Virgitti. Rodier. Ingersoll II, p. 206 sq.
(47) Laclémandière, p. 105. Granier, p. 223.
(48) Salomon I, II, III, IV.
(49) Taylor.
(50) Wilson. Voir aussi Moore III.
(51) Brown.
(52) Kayan. Cadiergues. Schlinger. G. Nasse. Mc Cann. Vigoureux. Ingersoll *II*, p. 206. Laclémandière, p. 107 sq. Eckert. Vernotte, etc...
(53) M. B. Coyle I, II. *Cf.* Boussinesq I, p. 323.
(54) Calvet I, II.

5. — Les analogies hydrodynamiques

Le mouvement de l'eau et la disposition des filets dans l'eau en mouvement prêtent à de nombreuses applications analogiques [55]. Les deux plus connues sont celle de Hele-Shaw et l'Hydrocal de Moore.

Hele-Shaw en 1901, à la suite d'expériences sur un flux laminaire d'eau ou de liquide visqueux, inventa une méthode qui consiste à faire écouler le liquide entre deux plaques de verre rapprochées, tout en colorant certains filets liquides. On peut avoir ainsi la réalisation visuelle de champs assez compliqués à calculer [56] et on est arrivé à figurer ainsi des champs rotationels ou des champs en milieu à perméabilité variable [57]. Cependant, l'appareil de Hele-Shaw est dispendieux et sert difficilement pour des profils divers (it is « costly and inflexible ») [58]. Aussi, A. D. Moore a inventé la méthode dite du « Lit de Sable » (Sandbed), beaucoup plus simple à exécuter, beaucoup plus souple, permettant des réalisations de champs jusque là impossibles à mettre en évidence visuellement [59].

Tous ces appareillages donnent une *vue statique* d'un *champ*. Les *valeurs* numériques exigent un calcul ou une construction graphique.

A. D. Moore, en 1936, avait imaginé un appareil, l' « Hydrocal », basé sur les analogies entre l'écoulement de l'eau dans les tubes capillaires et l'*écoulement* [60] de la chaleur dans un tube de flux quelconque. Son appareil comportait un certain nombre de tubes verticaux à section assez forte, réunis par des tubes capillaires horizontaux. L'eau circulant de tube vertical à tube vertical représentait la chaleur circulant d'un élément à l'autre du tube de flux.

Les niveaux figuraient les températures et la résistance des tubes capillaires signifiait la résistance calorifique existant entre deux éléments du système thermique. Après avoir réalisé un appareil simple de démonstration, A. D. Moore construisit un modèle beaucoup plus complexe permettant des combinaisons diverses.

Mais, pris par de nombreux autres travaux il ne poussa pas

(55) Boussinesq I, p. 322 sq. Bouasse I, II, III, IV. Riabouchinsky I, III. Dubois, p. 20. Profos.
(56) Moore III, p. 4. Riabouchinsky. Granier, p. 177 sq et 225 sq.
(57) Riabouchinsky. Popovitch.
(58) Moore V.
(59) Moore II, III, IV, V.
(60) Pour la commodité du langage, nous parlerons désormais d'écoulement de la chaleur, assimilant la chaleur à un fluide, sans méjuger de sa nature véritable.

plus loin la théorie de cette méthode [61]. Cependant, c'est une des rares qui permettent, de façon simple, de réaliser numériquement la solution de l'équation de la chaleur dans beaucoup de cas de régime variable.

C'est alors qu'ayant personnellement à résoudre quelques problèmes assez complexes sur la conduction de la chaleur, nous imaginâmes de *façon indépendante* [62] un appareil absolument semblable à celui de A. D. Moore ; mais nous eûmes l'occasion de vérifier que cette analogie hydraulique pouvait conduire à des résultats nouveaux. La présente thèse, après un exposé de l'appareillage employé et des lois de similitude utilisées, aura pour but de montrer que la méthode de l'écoulement dans les tubes capillaires, outre sa facilité de montage a une triple valeur :

1°) Elle permet d'illustrer des phénomènes connus par ailleurs, et d'obtenir facilement d'excellentes courbes pouvant servir d'abaques pour les calculs.

2°) Elle permet de réaliser des courbes originales qu'il est difficile ou impossible d'obtenir autrement, et d'exprimer graphiquement la solution de problèmes dont les équations assez difficiles ne « parlent » pas à l'esprit du physicien.

3°) Elle permet des intuitions mathématiques et même des démonstrations faciles, qui en font un outil scientifique intéressant.

(61) A. D. Moore I. Cf. M. Adams, p. 47 ; Laclémandière, p. 107.
(62) Nous n'eûmes connaissance des travaux de A. D. Moore qu'au cours de recherches bibliographiques postérieures.

CHAPITRE II

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE DE L'APPAREILLAGE EMPLOYÉ

Les analogies hydrauliques peuvent mener à des résultats intéressants avec un appareillage rapidement construit, facile à réaliser et d'ailleurs perfectible.

1. — Les divers éléments de l'appareillage

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'appareillage, pour les problèmes simples, se compose de *tubes verticaux* réunis par des *tubes capillaires*. Il faut pouvoir lire à chaque instant le *niveau* de l'eau dans les tubes verticaux. Enfin, l'alimentation en eau de l'appareil nécessite, selon le cas, un *bassin d'alimentation* à niveau constant supérieur ou un *bassin de réception* à niveau constant inférieur.

Un tube vertical et le tube capillaire correspondant forment un *élément* de l'appareillage. Nous appelons aussi *élément vertical* le tube vertical, et *élément horizontal* le tube capillaire.

2. — Description d'un élément

Nous avons utilisé plusieurs modèles. Celui qui nous a servi le plus souvent se composait d'un tube de Pyrex de 10 mm de diamètre intérieur, enchâssé à sa basse dans un té de cuivre à l'aide d'un cylindre creux de caoutchouc. Les deux autres orifices du té étaient munis de deux tubes non capillaires sur lesquels on pouvait facilement brancher (ou débrancher) les tubes capillaires employés (figure 2-2 a). L'expérience comme le calcul ont montré que la résistance de l'ensemble à l'écoulement de l'eau est négligeable par rapport à celle des capillaires.

Chaque élément était monté sur une potence portant une graduation en millimètres au regard du tube vertical. Toutes les potences étaient fixées sur un socle commun à l'aide d'une vis ce qui permettait leur changement ou leur suppression, tout en assurant une rigidité suffisante à l'ensemble, ainsi que la constance du niveau zéro.

Pour la mise en service d'un élément il faut prendre grand soin d'assurer l'étanchéité des joints et veiller à l'absence de bulles d'air.

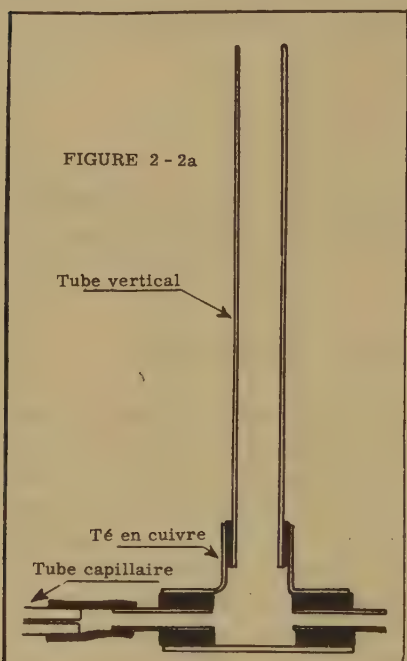


FIGURE 2 - 2a

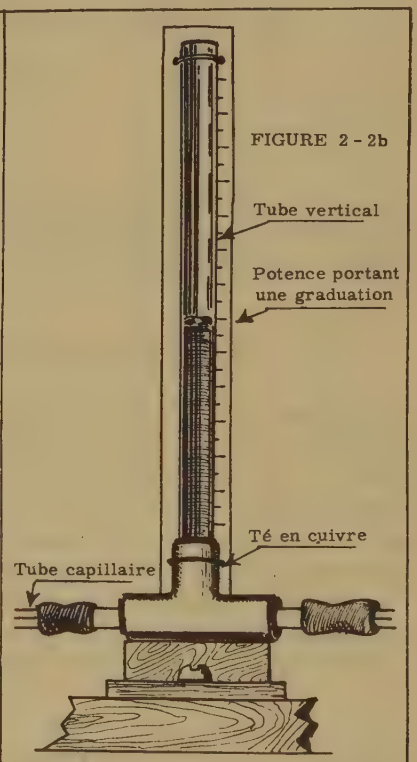


FIGURE 2 - 2b

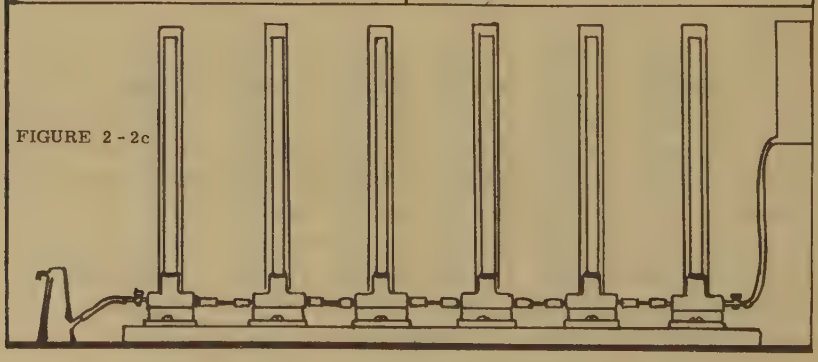


FIGURE 2 - 2c

La figure (2-2a) montre un élément en coupe, la figure (2-2b) un élément en élévation, monté sur son support, et la figure (2-2c) une batterie de 6 éléments. Cette batterie nous a servi, avec des tubes capillaires différents, à de nombreuses expériences. Sur la figure (2-2c) on voit deux réservoirs à niveau constant, supérieur et inférieur. On pouvait aussi interrompre la communication entre deux éléments successifs grâce à des pinces de Mohr à vis.

Nous n'avons pas éprouvé le besoin d'assurer la mise au zéro des divers éléments par un tube de dégagement comme le fait Moore [1], ce qui entraîne une complication de montage.

Nous avons utilisé aussi, comme nous l'expliquerons en temps voulu, des montages plus complexes.

3. — Etude des capillaires

A l'égard des tubes capillaires, nous avons vérifié les trois points suivants :

1° *Lorsqu'un élément se vide par tube capillaire dans un autre élément, le débit est proportionnel à la différence de niveau entre les deux éléments.*

En observant que le flux est positif dans le sens des niveaux décroissants, et en appelant $\frac{dq}{dt}$ le débit, z la différence de niveau et m une constante qui dépend uniquement du tube capillaire on doit donc avoir :

$$\frac{dq}{dt} = -mz \qquad (2\text{-}3a)$$

D'autre part, dans le cas de la figure (2-3a), la différence de niveau z varie d'une quantité proportionnelle à dq pendant ce même temps dt :

$$dz = \frac{1}{n} dq \qquad (2\text{-}3a)$$

où n ne dépend que du tube vertical ; d'où :

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{m}{n} z \qquad (2\text{-}3c)$$

et

$$z = z_0 e^{-\frac{m}{n}t} \qquad (2\text{-}3d)$$

où z_0 est la valeur de z pour $t = 0$.

(1) Moore I.

Nous donnons ci-après le tableau (2-3a) et la courbe de la figure (2-3b) qui consignent les résultats relatifs à un tube capillaire de 0 mm 5 de diamètre et de 627 mm de longueur, pour $\frac{m}{n} = 0{,}021$. Nous mettons en regard les nombres donnés par l'expérience et ceux fournis par le calcul d'après l'équation (2-3d). La concordance est parfaite, les niveaux ne se lisant qu'au demi-millimètre près.

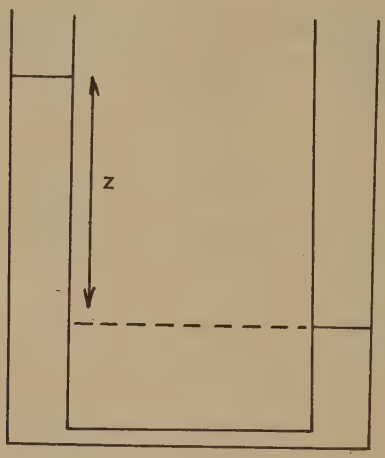


Figure (2-3a)

Tableau (2-3a)

Temps en minutes ..	0	3	20	38	88	218
z mesuré en cm	24,2	22,8	16,3	11,0	3,8	0,3
z calculé en cm	24,2	22,78	16,2	11,2	3,8	0,29

2° *Pour des tubes capillaires de même section et de longueur différente, on peut définir une résistance, qui est proportionnelle à la longueur du tube.*

Dans l'équation

$$\frac{dq}{dt} = -mz \qquad (2\text{-}3a)$$

par assimilation aux équations du courant électrique la constante

m relative au capillaire peut être considérée comme l'inverse d'une résistance ρ. On peut écrire

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\rho} z \qquad (2\text{-}3e)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{n\rho} z \qquad (2\text{-}3f)$$

Nous avons vérifié que la résistance ρ est proportionnelle à la longueur du tube capillaire — pourvu que cette longueur ne soit pas tellement petite que l'écoulement devienne turbulent. Le tableau (2-3b) et la figure (2-3c) montrent les résultats pour un tube capillaire de 20,85 cm de longueur que nous avons sectionné en fragments divers. On a bien une droite pour représenter la résistance en fonction de la longueur.

Tableau (2-3b)

Longueur du tube en cm ..	20,85	10,50	5,65	4,85
Valeur de $\frac{1}{n\rho}$	0,035	0,069	0,124	0,150
Valeur de $n\rho$	28,6	14,5	8,06	6,66

3° *Pour des tubes capillaires de même longueur, la résistance est inversement proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre.*

En effectuant cette vérification, nous nous sommes rendu compte que le calibrage des tubes capillaires en verre est assez approximatif. Cela ne crée pas une grande difficulté, car, en pratique, nous avons *mesuré* la résistance de chacun des tubes employés par un procédé très simple expliqué au paragraphe suivant.

Il résultait de nos vérifications

1° *Que l'écoulement de l'eau dans nos tubes suivait la loi de l'écoulement capillaire lent,* même pour des différences de niveau de l'ordre du décimètre (Loi de Poiseuille)[2];

(2) *Cf.* Hodgman, p. 1992. Boussinesq I, p. 325. Brinkman, p. 120. Prandtl, p. 164. Bakhmeteff, p. 14 et 15. Pierre, p. 12 sq. Techniques I et VI. Vernotte IX, etc...

2°) *Que la quantité* $\frac{1}{\rho}$ peut s'écrire $\frac{K\sigma}{l}$, où σ représente la 4e puissance du diamètre et l la longueur du tube capillaire. Nous appelons σ la « section équivalente » du tube, et nous justifierons cette appellation plus loin;

3°) *Que la loi d'écoulement* dans un tube capillaire — équa-

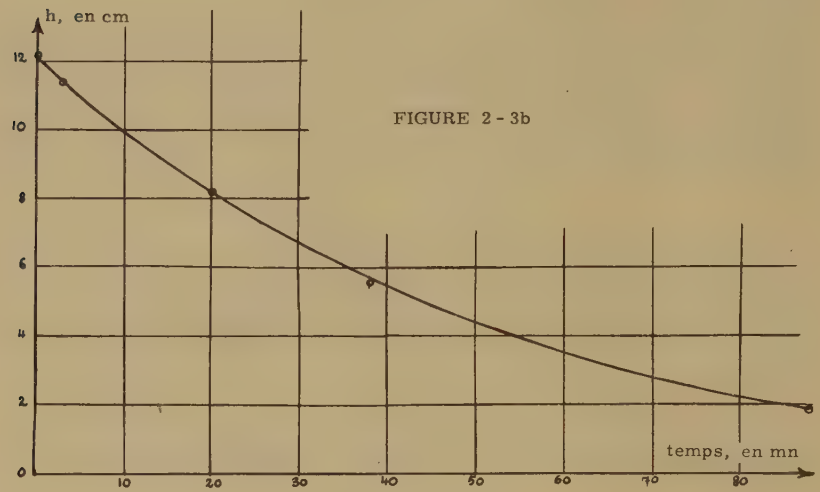


FIGURE 2 - 3b

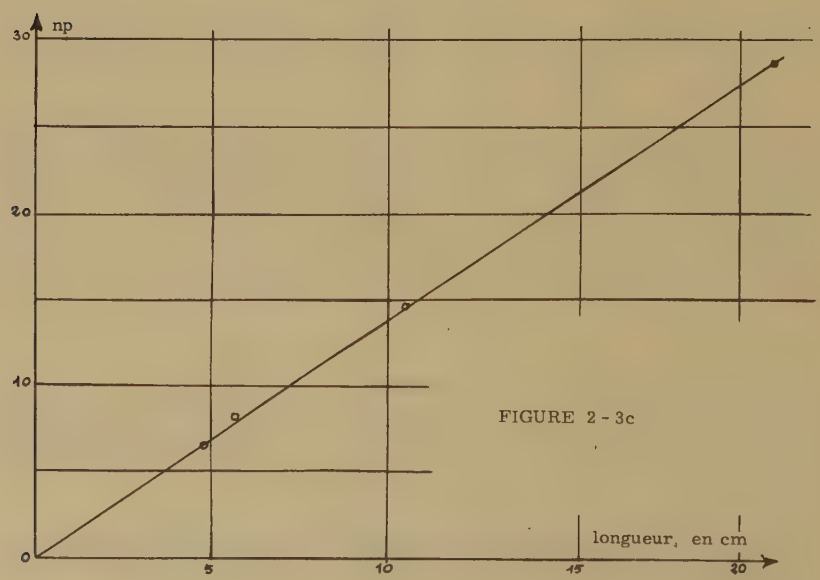


FIGURE 2 - 3c

tions (2-3a) et (2-3c) — pourra être représentée par les formules suivantes :

$$\frac{dq}{dt} = - \, K\sigma \, \frac{z}{l} \qquad (2\text{-}3g)$$

$$\frac{dz}{dt} = - \, \frac{K\sigma}{n} \, \frac{z}{l} \qquad (2\text{-}3h)$$

où z est la différence de niveau entre les deux tubes verticaux qui échangent la quantité d'eau dq.

Nous verrons au chapitre suivant le sens de ces formules.

Dans nos expériences, pour éviter un écoulement trop rapide qui fait apparaître un terme en mv^2 [2] nous n'avons pas employé des tubes capillaires de plus de 1 mm de diamètre. Nous avons utilisé presque uniquement des tubes de 0 mm 5.

4. — Mesure pratique de la résistance d'un capilliaire

Nous nous sommes servi d'un *tube capillaire étalon,* et nous avons mesuré les résistances par *comparaison* en utilisant le fait suivant :

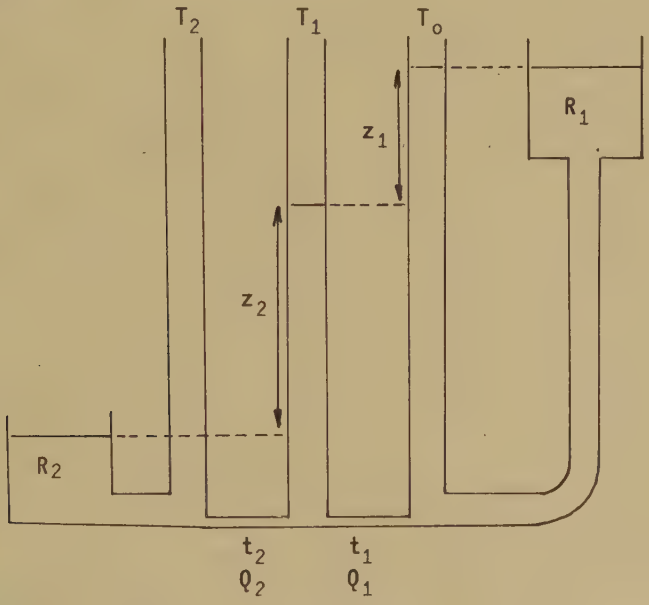


Figure (2-4a)

Si l'on établit un courant d'eau *permanent* entre un réservoir supérieur R_1 à niveau constant et un réservoir R_2 inférieur à n. ct. à travers un système formé par trois éléments verticaux T_0, T_1 et T_2 réunis par deux tubes capillaires t_1 et t_2 de résistance ρ_1 et ρ_2, le débit de T_0 en T_1 égale celui de T_1 en T_2. On a donc, *quelle que soit la section des élements verticaux T*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Il nous a donc suffi de brancher le tube étalon à demeure en t_1 par exemple; le tube à étudier était mis en t_2; on laissait établir le régime permanent, et on avait immédiatement

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{z_2}{z_1}$$

Pour obtenir une résistance déterminée, nous opérions sur un tube assez long que nous ramenions ensuite à la longueur voulue par une simple règle de trois. Une deuxième mesure permettait une vérification.

CHAPITRE III

ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE DE LA CHALEUR

Ce chapitre a pour but d'établir les analogies entre le mouvement de la chaleur par conduction et le mouvement de l'eau dans les éléments définis dans le chapitre précédent.

1. — Mouvement de la chaleur dans un corps [1]

Il est régi par la *loi de* Fourier [2] :

$$dQ = -kS\frac{\partial\theta}{\partial x}dt \qquad (3\text{-}1a)$$

où dQ est la quantité de chaleur qui s'écoule en un temps dt entre deux aires isothermes de surface S, à distance infiniment petite dx, pour un gradient de température $\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

L'équation générale de la chaleur qui en dérive est [3]

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = h \cdot \nabla^2(\theta) \qquad (3\text{-}1b)$$

où h est la diffusivité $\frac{k}{\gamma}$; et pour les flux linéaires cette équation devient [4] :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = h\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad (3\text{-}1c)$$

(1) *Cf.* Fabry, Ingersol I et II, Ollivier II, p. 178 sq., Poincaré, etc...
(2) Fabry, p. 27, etc...
(3) Fabry, p. 30, Ingersol II, p. 13-14, etc...
(4) Fabry, p. 82, Ingersol II, p. 78 sq., etc...

Cette équation, avec les conditions imposées aux limites, suffit à déterminer entièrement le problème de la chaleur.

2. — Chemin thermique et chemin hydraulique

Dans le cas d'un *flux linéaire,* une ligne de flux peut être considérée comme un véritable « *chemin thermique* ». Dans ce chemin, la température est assujettie à une loi initiale et les extrémités sont dans des conditions thermiques déterminées.

Nous allons montrer qu'un tel chemin thermique est représenté par un « chemin hydraulique » formé d'éléments mis bout à bout. On pourra supposer tout d'abord qu'il y a autant d'éléments hydrauliques que l'on distingue de parties infiniment petites dans le chemin thermique.

Sauf mention expresse, nous ne considérerons que les problèmes de flux linéaire.

3. — Loi et équation du mouvement dans les chemins hydrauliques

Nous avons vu que la loi qui régit l'écoulement est

$$dq = -K\sigma \frac{z}{l} dt. \qquad (3\text{-}3a)$$

Pour évaluer le mouvement qui en résulte, considérons un chemin hydraulique formé d'éléments verticaux T_0, T_1... T_p... de

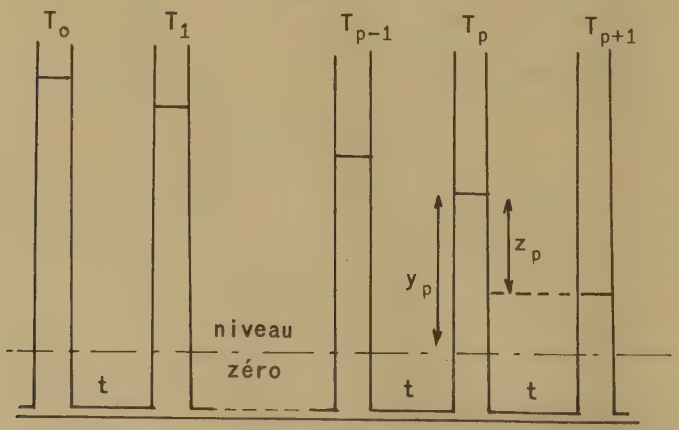


Figure (3-3a)

section S réunis par des tubes capillaires t de longueur l (fig. 3-3a).

Soit y_p le niveau de l'eau, dans un élément vertical T_p, pris par rapport à un niveau de référence (niveau zéro).

Un mouvement d'eau de dq correspond à une variation de volume :

$$dv = dq \text{ (5)} \tag{3-3b}$$

Il entraîne une variation du niveau y valant :

$$dy = \frac{dq}{S} \tag{3-3c}$$

Or, l'élément T_p reçoit de T_{p-1} une quantité dq_{p-1} et il donne à l'élément T_{p+1} la quantité dq_p. Le bilan de la quantité d'eau dq mis en jeu dans le temps dt s'écrit :

$$dq = dq_{p-1} - dq_p \tag{3-3d}$$

Il en résulte une variation de niveau en T_p :

$$dy = \frac{dq}{S} = \frac{dq_{(p-1)} - dq_p}{S} = -\frac{K\sigma}{S}\left(\frac{z_{(p-1)} - z_p}{l}\right) dt \tag{3-3e}$$

Dans l'hypothèse qu'il y a autant d'éléments hydrauliques que de parties infiniment petites du chemin thermique, la longueur l devient dl, la section droite des éléments verticaux devient $S_1\, dl$ en appelant S_1 la section d'un élément correspondant à une *longueur unité* de chemin, z devient $\frac{\partial y}{\partial l}\, dl$ et les équations (3-3a) et (3-3e) deviendront :

$$\frac{dq}{dt} = -K\sigma \frac{\partial y}{\partial l} \tag{3-3f}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{K\sigma}{S_1 dl} \frac{\frac{\partial y_{p-1}}{\partial l} - \frac{\partial y_p}{\partial l}}{dl} dl = +\frac{K\sigma}{S_1} \frac{\partial^2 y}{\partial l^2} \tag{3-3g}$$

La loi fondamentale et l'équation fondamentale du mouvement dans les tubes hydrauliques sont identiques à celles du mouvement de la chaleur. Nous sommes donc fondés à affirmer que l'analogie hydrodynamique à éléments infiniment petits décrit de façon exacte non seulement les états permanents de la chaleur, mais encore les états en régime variable.

(5) Pour un liquide autre que l'eau on aurait $dv = \frac{dq}{p}$, p étant le poids spécifique du liquide.

4. — Correspondances et notations

A défaut d'un signe consacré, nous nous servirons du signe ∅ pour indiquer qu'une grandeur dans un système *correspond* à une autre grandeur dans un système analogue.

En comparant les équations hydrodynamiques (3-3f) et (3-3g) et les équations thermodynamiques (3-1a) et (3-1c) on trouve les correspondances suivantes :

y (niveau des éléments verticaux) ; ∅ θ (température) ;
l (longueur des tubes capillaires) ; ∅ x (longueur du chemin thermique) ;
$K\sigma$ (coefficient de conductibilité hydrodynamique) ; ∅ k (coefficient de conductibilité thermique) ;
S_1 (section droite du tube vertical correspondant à $l = 1$) ; ∅ γ (capacité calorifique de l'unité de volume) ;
$\frac{K\sigma}{S_1}$; ∅ $h = k/\gamma$ (diffusité thermique) ;
$\rho = \frac{l}{K\sigma}$; ∅ x/ks (résistance thermique).

Il en résulte immédiatement que la lecture du niveau de l'eau dans un appareillage hydrodynamique donne directement la courbe des températures. Se fixer une répartition initiale de températures, c'est analogiquement répartir l'eau dans les tubes verticaux suivant des niveaux proportionnels à ces températures. Fixer des conditions de température aux extrémités du chemin thermique c'est analogiquement fixer des conditions de niveau aux extrémités du chemin hydraulique. On peut donc avec la plus grande facilité passer d'un système à son analogue.

5. — Capacité hydrodynamique

Nous venons de voir que la section S_1 des tubes verticaux relatifs à l'unité de longueur de chemin hydrodynamique est l'équivalent de la capacité calorifique de l'unité de volume (relative à l'unité de longueur de chemin thermodynamique pour un tube de flux de section droite unité).

Nous l'appellerons capacité unitaire hydrodynamique et la représenterons désormais par la notation C_1

$$C_1 \varnothing \gamma$$

6. — Diffusité hydrodynamique

La quantité $\frac{K\sigma}{C_1}$ joue le rôle de la diffusivité thermique dans les équations hydrodynamiques. Elle a la valeur d'une conductivité divisée par une capacité. Nous l'appellerons diffusivité hydro-

dynamique. C'est elle qui régit la vitesse des phénomènes. Nous la symboliserons par H

$$H \varnothing h$$

Tout comme dans les équations de la chaleur, c'est H qui intervient en régime variable. Par contre, dans les régimes permanents, $K\sigma$ intervient seul puisque

$$K\sigma \varnothing k$$

7. — Longueur nominale et longueur réelle des tubes capilliaires

Théoriquement, d'après ce qui précède, pour faire varier la résistance des tubes capillaires il faudrait faire varier σ, puisque K est un facteur constant.

Cette variation de σ est difficile, voire impossible à obtenir. Nous avons été conduit à agir sur la *longueur* du tube capillaire, qui sera multipliée par n si la résistance doit être multipliée par n [6]. Soit donc l_0 la longueur non multipliée du tube. Elle représente, à un facteur scalaire près, la longueur du chemin thermique. Nous dirons que c'est sa *longueur nominale*. Quant à la longueur $l = n \cdot l_0$, ce sera la longueur réelle. Si un chemin thermique est coupé en tronçons d'égale longueur, mais de résistance variable, dans la représentation hydrodynamique les *longueurs nominales* de capillaires seront toutes égales, mais les *longueurs réelles* sont entre elles comme les résistances thermiques à figurer.

8. — Chemin hydrodynamique à nombre fini d'éléments

La théorie précédente est exacte, mais suppose un matériel expérimental irréalisable en pratique. On est obligé en effet d'utiliser un nombre *fini* d'éléments pour figurer un chemin thermique. La valeur des résultats est alors à celle d'un chemin hydrodynamique idéal ce qu'un calcul par différences finies est au calcul différentiel précis. On opère de façon similaire dans presque toutes les méthodes dites « auxiliaires » : méthode de relaxation [7], méthodes numériques [8], méthodes graphiques du genre de la méthode Binder-Schmidt [9]. La pratique est donc classique et donne des résultats très satisfaisants avec un petit nombre d'éléments, six ou huit par exemple [10].

Soit par exemple à représenter hydrauliquement un mur A_0B

(6) n peut être entier ou fractionnaire, supérieur ou inférieur à l'unité.
(7) Southwell, Bradfield, Mitchel, Ingersol II, p. 213, etc...
(8) Ingersol II, p. 216, etc...
(9) Mc Adams I, p. 43 sq. Ingersol II, p. 209, etc...
(10) *Cf.* Laclémandière, p. 128.

isolé du milieu ambiant, et où la température θ est au temps zéro une fonction de la profondeur x du point considéré par rapport à la surface A_0 (fig. 3-8a).

Nous imaginerons ce mur découpé en un nombre d'éléments E_1, E_2, E_3, ... égaux, par des plans A_1, A_2, A_3, ... parallèles aux faces A_0 et B, et nous supposons que la température est la même

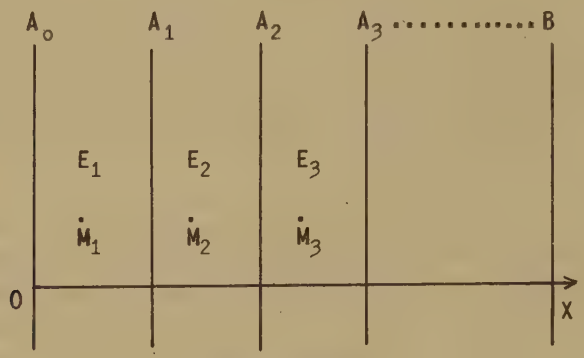


Figure (3-8a)

dans toute l'épaisseur d'un élément, c'est-à-dire généralement sa température moyenne. Cette température moyenne θ_1, θ_2, θ_3, ... sera en particulier attribuée au milieu M_1, M_2, M_3, ... de chaque élément.

Les *éléments hydrauliques verticaux* T_1, T_2, T_3... représentant ce chemin thermique (fig. 3-8b) ont une *capacité hydraulique* proportionnelle à la *capacité thermique* de chacun des éléments du mur représentés.. Quant aux *éléments hydrauliques horizontaux* t_1, t_2, t_3,... leur *longueur nominale* représente les distances : $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_2 M_3}$ ... et, si ces longueurs sont égales, si x_1 est l'épaisseur du mur (abscisse de B dans la fig. 3-8a), et s'il y a n éléments, la *longueur nominale* des tubes t_1 t_2 ...

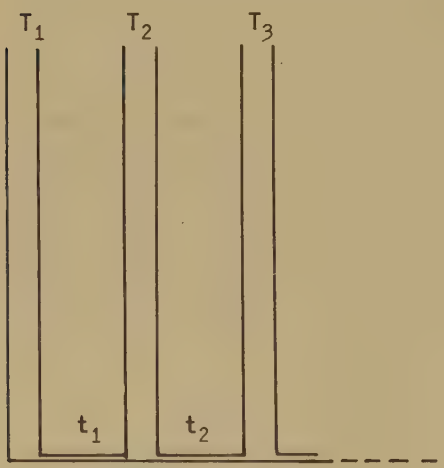


Figure (3-8b)

sera proportionnelle à $\frac{x_1}{n}$. Quant à leur *résistance hydrodynamique* elle sera proportionnelle à la *résistance thermique* dans le tube de flux considéré entre les points M_1 et M_2 pour l'élément t_1, entre M_2 et M_3 pour l'élément t_2, etc.

On aboutira donc à une représentation *discontinue des températures* dans le mur, qui sera l'équivalent de la réalité *continue*. Quant aux intervalles de temps, ils resteront conformes à la réalité, et c'est un avantage sur les méthodes qui sont obligées de morceler le temps.

Nous avons supposé un chemin thermique isolé à ses extrémités. Si une extrémité de ce chemin était en contact avec un millieu extérieur à température constante ou variable, il suffirait de mettre l'élément hydrodynamique figuratif en contact avec un réservoir à niveau constant ou variable selon le cas, par un tube capillaire. La longueur nominale de ce tube capillaire représente le chemin OM_1 de la figure (3-8a). Sa résistance hydrodynamique représente la résistance thermique de ce même chemin, à laquelle il conviendrait d'ajouter s'il y a lieu la résistance de surface.

CHAPITRE IV

EXPÉRIENCES SUR DES SUJETS CLASSIQUES PROBLÈME DU MUR

1. — But du présent chapitre

Ce chapitre est destiné à montrer, par un exemple, que l'appareillage décrit permet d'établir des courbes satisfaisantes, comparables aux courbes classiques.

Nous nous sommes proposé de représenter hydrodynamiquement le problème suivant :

Un mur homogène d'épaisseur finie est isolé du milieu ambiant. Primitivement il se trouve à une température uniforme que nous prenons comme zéro. Dans l'épaisseur du mur, tout près de la surface, se fait au temps zéro une production subite de chaleur Q, comptée par unité de surface du mur.

Ce problème est connu, sous le nom de problème d'une source instantanée de chaleur [1]. Il a été traité expérimentalement pour la diffusion des liquides [2]. On peut donc se référer à des courbes connues.

Nous montrerons dans le chapitre suivant que le même problème, en milieu sphérique ou cylindrique, n'offre aucune difficulté à l'analyse hydrodynamique.

2. — Figuration hydrodynamique du problème

Pour figurer hydrodynamiquement ce problème, il faut d'abord supposer le mur découpé en n éléments E_1, E_2, E_3 ... suivant ce qui

(1) *Cf.* Ingersol II, p. 109 et sq., etc...
(2) Duclaux, p. 15 sq., etc...

a été dit au chapitre précédent. Il faut en outre supposer qu'initialement sa température est zéro, sauf dans le premier élément où elle est θo, valeur reliée à Q par l'égalité

$$\theta_0 = \frac{Q}{\gamma \Delta x} \qquad (4\text{-}2a)$$

où γ est la chaleur spécifique par unité de volume et Δx l'épaisseur du premier élément E_1 (fig. 4-2a).

Hydrauliquement le mur est représenté par *n éléments verticaux* T_1, T_2, T_3 ..., réunis par des tubes capillaires t_1, t_2, t_3, ...,

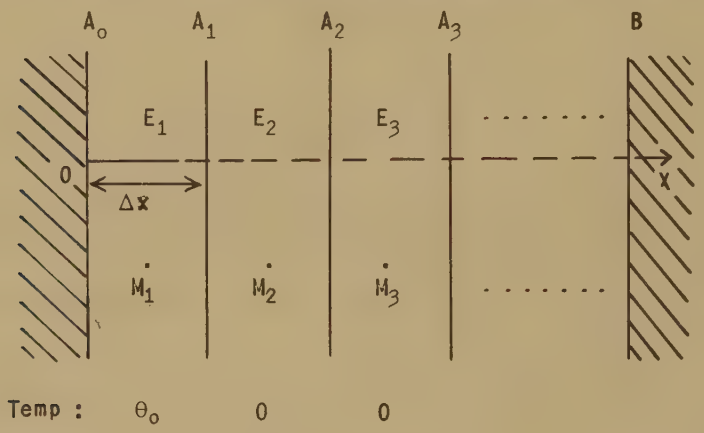


Figure (4-2a)

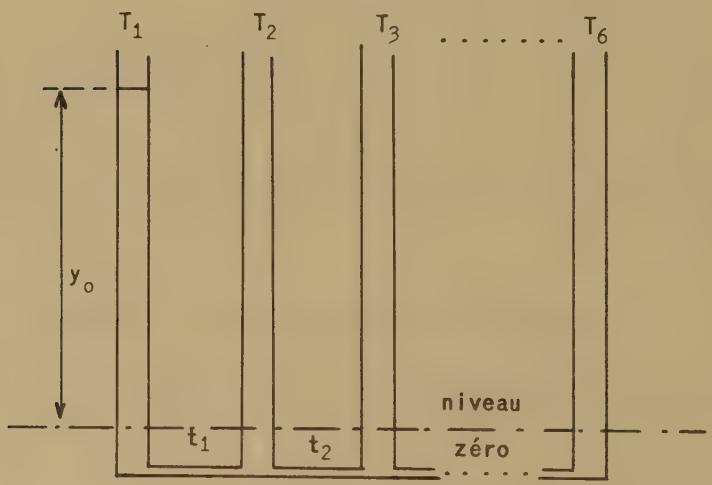


Figure (4-2b)

d'égale résistance. Au temps zéro, tous les tubes T sont au niveau zéro, sauf le premier, T_1, qui est au niveau y_0 (fig. 4-2b).

Nous avons utilisé six éléments.

3. — Résultats

Les résultats sont donnés par le tableau 4-3a et les courbes des figures 4-3a et 4-3b, les premières représentant le niveau dans chaque élément en fonction du temps, les secondes représentant le niveau en fonction des abscisses pour des temps divers.

Les niveaux sont exprimés en centimètres, les temps sont évalués en minutes.

Dans tout ce qui suivra nous exprimerons le temps par un nombre décimal, pour la commodité de la représentation.

Tableau 4-3a

1° Elément		2° Elément		3° Elément		4° Elément		5° Elément		6° Elément	
Temps t	Niveau y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,4	28,5	0,53	3,3	0,65	0	-	-	-	-	-	-
0,82	26,3	0,98	4,8	1,12	1	1,23	0,1	1	0	-	-
1,485	23,3	1,65	6,8	1,82	1,5	2,07	0,3	2,15	0,05	-	-
2,55	19,8	2,52	8,5	3,06	2,4	3,2	0,7	-	-	-	-
-	-	4,15	9,3	4,45	3,2	4,65	1,1	4,87	0,4	5,13	0
5,65	14,3	5,93	9,4	6,1	4,3	6,52	1,9	6,85	0,9	7	0,02
7,98	12,3	7,98	9,05	8,43	5,1	8,65	2,7	8,82	1,4	8	0,2
9,35	11,3	9,55	8,7	9,65	5,3	9,90	3	10,03	1,6	9	0,5
11,53	10,2	11,98	8,3	12,27	5,7	12,65	3,6	13,48	2,2	13	1,2
21,18	7,6	22,20	6,7	22,53	5,5	23,05	4,5	23,23	3,6	23	2,8
36,0	6,1	36	5,8	36	5,3	36	4,9	36	4,5	36	3,8
51,0	5,5	51	5,4	51	5,2	51	5,0	51	4,9	51	4,6
180	5,1	180	5,1	180	5,0	180	5,0	180	5,0	180	5,0
∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0

Les courbes obtenues, comparées avec les courbes connues, manifestent leur identité. D'autre part, on peut remarquer que la diffusion dans le sixième élément ne devient sensible qu'au bout d'un temps assez long; le phénomène se comporte donc au début comme dans un milieu indéfini, ce qui permet une vérification. Le niveau de chaque élément intermédiaire passe par un maximum

pour un temps tm. Soit tm_2 le temps du maximum pour le deuxième élément et tm_3 le temps du maximum pour le troisième élément. Si x_2 et x_3 sont les abscisses correspondantes, on doit avoir, en milieu indéfini [3] :

$$\frac{tm_2}{tm_3} = \frac{x_2^2}{x_3^2} \qquad (4\text{-}3a)$$

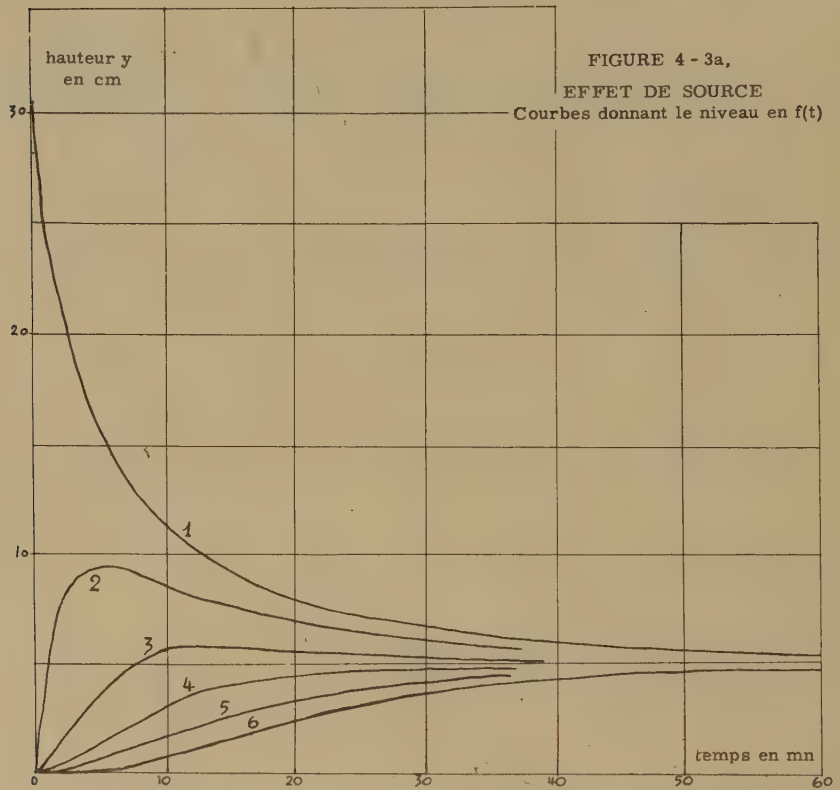


FIGURE 4 - 3a,
EFFET DE SOURCE
Courbes donnant le niveau en f(t)

Or les temps tm_2 et tm_3 sont assez petits pour que l'on puisse se considérer en milieu indéfini. La loi doit donc s'appliquer.

On trouve :

$tm_2 = 5$ $\qquad X_2 = \frac{3}{2}$ (*milieu* du 2e élém.)

$tm_3 = 14$ $\qquad X_3 = \frac{5}{2}$ (*milieu* du 3e élém.)

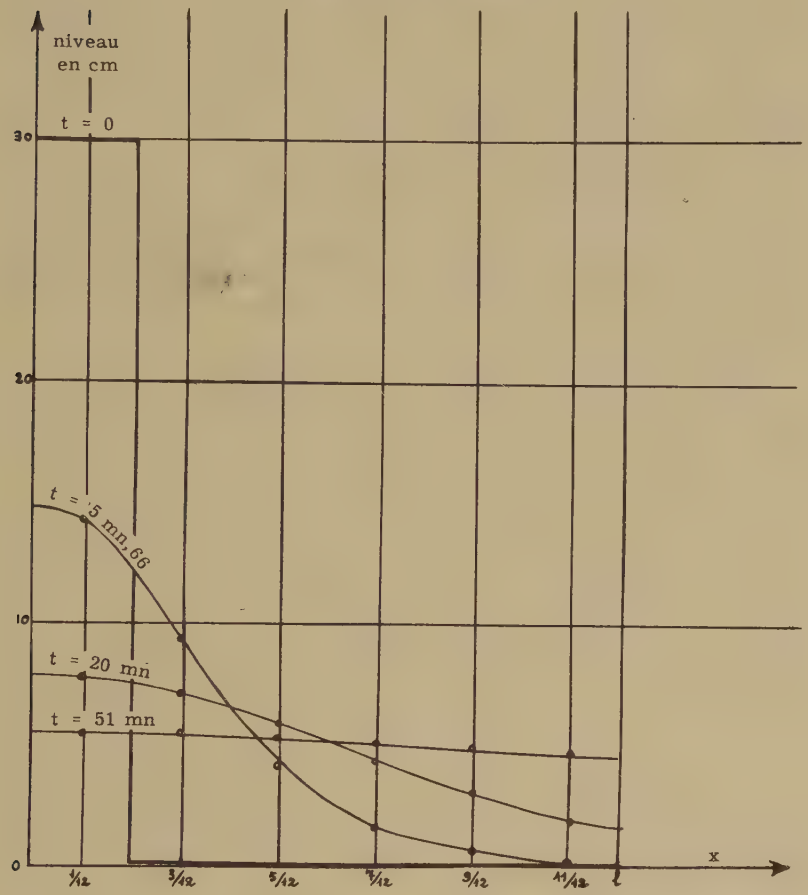
(3) Déduite de l'expression $tm = \frac{x^2}{2h}$. *Cf.* INGERSOL II, p. 111.

$$\frac{tm_2}{tm_3} = \frac{5}{14} = 0{,}357 \qquad \frac{X_2^2}{X_3^2} = \frac{9}{25} = 0{,}360$$

La concordance est excellente. Pour les autres éléments, le temps devient trop long et la loi ne s'applique plus.

FIGURE 4 - 3b

Niveaux en fonction de x
pour divers temps.



4. — Utilisation des courbes

Les courbes obtenues ont la valeur de modèles et sont valables pour des *applications numériques quelconques* du *même problème,* lorsqu'on se donne des constantes thermiques différentes, ainsi qu'une autre épaisseur de mur ou une autre température initiale.

Nous savons en effet que toute solution du problème de la chaleur peut être mise sous la forme [4] :

$$\theta = \Sigma\, c\, e^{-i\omega x}\, e^{-\omega^2 ht} \qquad (4\text{-}4a)$$

Dans cette expression, les cœfficients c sont déterminés en *valeur relative par la forme* de la courbe initiale de la chaleur. Ils sont déterminés *en valeur numérique* par les valeurs numériques de la température initiale exprimée par cette courbe. Soit à passer d'une expérience particulière P_0 à un problème P_1 où les températures initiales sont multipliées par p, les autres facteurs (dimension géométrique et diffusivité) ne changeant pas. Il suffira de multiplier tous les cœfficients c par p pour obtenir la nouvelle représentation des températures :

$$\theta = p\, \Sigma\, c\, e^{-\omega ix}\, e^{-\omega^2 ht} \qquad (4\text{-}4b)$$

où seule est changée l'*échelle des températures*. Pour utiliser les courbes données par l'expérience P_0 il suffit donc d'attribuer, à deux points quelconques de la courbe initiale des températures de P_0, leur valeur dans le problème P_1, pour avoir l'échelle convenable des températures et donc des courbes utilisables *sans autre changement*.

Si, en outre, les autres facteurs, dimension géométrique et diffusivité, ne sont plus les mêmes dans P_1, l'échelle des températures n'est pas changée, non plus que *la forme* des courbes. Mais l'échelle des temps doit être modifiée comme suit :

a) *Si dans* P_1 *les épaisseurs de mur sont* n *fois plus grandes que dans* P_0, pour avoir la même forme initiale de distribution des températures il faut que les ω de l'équation (4-4b) soient divisés par n. Si l'on divise les ω par n, pour arriver au même état de température dans le temps, c'est-à-dire à la même valeur de $e^{-\omega^2 ht}$, il faut des temps n^2 fois plus grands. Donc si les dimensions géométriques deviennent n fois plus grandes, il faut multiplier les temps par n^2.

b) *Si dans* P_1 *la diffusivité devient* m *fois plus grande* que dans P_0, il évident que les exponentielles $e^{-\omega ix}$ n'en seront pas affectées. Mais l'exposant des facteurs $e^{-\omega^2 ht}$ est multiplié par m. *Pour arriver au même état de température il faudra prendre des temps* m *fois plus petits.*

Avec des notations homologues, ceci est vrai aussi pour le passage des courbes hydrodynamiques aux courbes thermiques, puisqu'alors les équations sont les mêmes.

(4) Voir par exemple Fabry, p. 81 et tous les traités. Voir également dans la présente thèse les chapitres qui traitent de la forme mathématique du problème des analogies hydrodynamiques

En résumé, les courbes de l'expérience hydrodynamique P_0 serviront intégralement pour résoudre le problème thermodynamique P_1 avec les précautions ci-desous :

— Pour les températures et les longueurs, prendre arbitrairement l'échelle qui s'ajuste aux conditions du problème P_1 ; par exemple : épaisseur du mur et température initiale de chaque face.

— Après cet ajustement, si les longueurs de P_1 valent n fois les longueurs de P_0 et si la diffusivité (thermique) de P_1 vaut m fois la diffusivité (hydrodynamique) de P_0, il *faudra multiplier* les temps de P_0 par n^2/m, c'est-à-dire *diviser* l'*échelle des temps* par n^2/m.

Ces remarques sont *absolument générales* pour la représentation des flux linéaires dans le problème du « mur », et des problèmes analogues, tels que ceux de la diffusion, etc...

CHAPITRE V

EXPÉRIENCES SUR DES SUJETS CLASSIQUES : PROBLÉMES SPHÉRIQUES ET CYLINDRIQUES

1. — Chemin thermique en coordonnées sphériques

Ici, on considère que la chaleur se propage suivant les rayons d'une sphère. Il s'ensuit que les tubes de flux, au lieu d'affecter la forme d'un prisme ou d'un cylindre comme dans le problème du mur, ont la forme d'une pyramide ou d'un cône.

On a encore la loi fondamentale :

$$dq = kS \frac{d\theta}{dr} dt \qquad (5\text{-}1a)$$

mais la section droite S varie suivant la loi :

$$S = \alpha r^2 \qquad (5\text{-}1b)$$

où α est l'angle solide de la pyramide ou du cône.

La résistance thermique élémentaire, pour une longueur infiniment petite de tube de flux, vaut encore :

$$d\rho = \frac{dr}{kS} \qquad (5\text{-}1c)$$

mais la résistance entre deux points d'abscisse r_1 et r_2 vaut :

$$\rho = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{kS} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{k\,\alpha r^2} = \frac{1}{k\,\alpha} \times \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \qquad (5\text{-}1d)$$

Les capacités calorifiques d'un tel chemin thermique ne sont pas proportionnelles aux longueurs. Si l'on veut diviser ce chemin thermique en éléments de même capacité depuis le point r_0 jusqu'au point r_n on a la condition suivante :

$$r_1^3 - r_0^3 = r_2^3 - r_1^3 = r_3^3 - r_2^3 = \ldots = r_n^3 - r_{n-1}^3 \qquad (5\text{-}1e)$$

Si le chemin thermique part du centre de la sphère il suffit de poser :

$$r_0 = 0 \qquad (5\text{-}1f)$$

ce qui donne pour le rayon r_p correspondant au $p^{\text{ième}}$ élément :

$$r_p = r_1 \cdot \sqrt[3]{p} \qquad (5\text{-}1g)$$

2. — Définition d'un chemin thermique particulier et sa représentation hydrodynamique

Pour nos expériences nous nous sommes donné :

$$r_0 = 1$$
$$r_1 = 2$$

ce qui donne la succession suivante de rayons :

1,0	3,072	3,848	4,397
2,0	3,302	4,0	
2,466	3,503	4,141	
2,802	3,684	4,272	

qui déterminent des éléments de même capacité. Nous avons groupé ces éléments deux par deux, ce qui détermine encore des éléments de même capacité, limités par les rayons r_0 r_2 r_4 ... c'est-à-dire par les rayons d'indice pair. Les rayons d'indice impair r_1 r_3 ..., déterminent dans les nouveaux éléments des points M'_1, M'_2 ... (fig. 5-2a) tels que la capacité du tube de flux est la même, pour chaque élément (r_p r_{p+2}), de part et d'autre de la section passant par les points M'. Ces points M' représentent donc les points M des éléments du mur (figure 4-2a).

Les résistances entre chaque élément correspondent aux chemins $M'_1M'_2$, $M'_2M'_3$, etc... La formule (5-1d) permet de les calculer facilement, ce qui donne :

$$\rho_1 = 0{,}142$$
$$\rho_2 = 0{,}053$$
$$\rho_3 = 0{,}0312$$
$$\rho_4 = 0{,}0214$$
$$\rho_5 = 0{,}01593 \ldots\ldots\ldots$$

Dans la représentation hydrodynamique (figure 5-2b), les éléments E_1, E_2, E_3 ... sont représentés par des tubes verticaux T_1, T_2, T_3 ... égaux reliés par des tubes capillaires de *longueur réelle* proportionnelle aux résistances ρ.

Nous avions adopté les longueurs réelles suivantes :

$$l_1 = 35{,}5 \text{ cm} ; \; l_2 = 13{,}375 \text{ cm} ; \; l_3 = 7{,}8 \text{ cm} ;$$
$$l_4 = 5{,}36 \text{ cm} ; \; l_5 = 3{,}4 \text{ cm} \ldots\ldots$$

Le montage est indiqué de façon suffisamment claire dans la figure (5-2b). Nous nous sommes borné à six éléments.

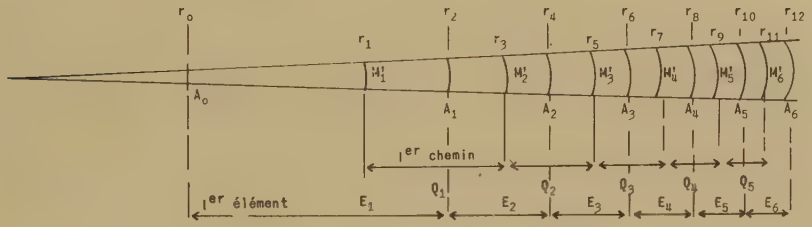


Fig. (5-2a). — Le Chemin thermique

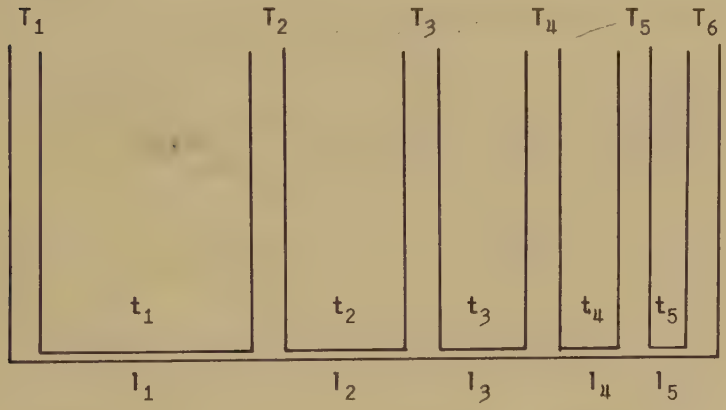


Fig. (5-2b). — Le chemin hydraulique correspondant

Les *longueurs nominales* des éléments capillaires sont déduites, à un facteur près égal à 1 pour une représentation homogène, des valeurs :

$$r_3 - r_1, \quad r_5 - r_3, \quad r_7 - r_5, \quad r_9 - r_7, \quad r_{11} - r_9.$$

3. — Essai du montage pour les coordonnées sphériques

Avant de traiter hydrodynamiquement le problème des sources, nous avons essayé le montage dans un cas très facile à vérifier, celui du régime permanent. Pour cela nous avons mis le premier élément T_1 en communication avec une source à niveau supérieur constant et le 6e élément T_6 avec une source à niveau inférieur constant (figure 5-3a).

Nous mettons en regard les résultats de l'observation et ceux du calcul, à partir de la formule

$$\theta = A \frac{1}{r} + B.$$

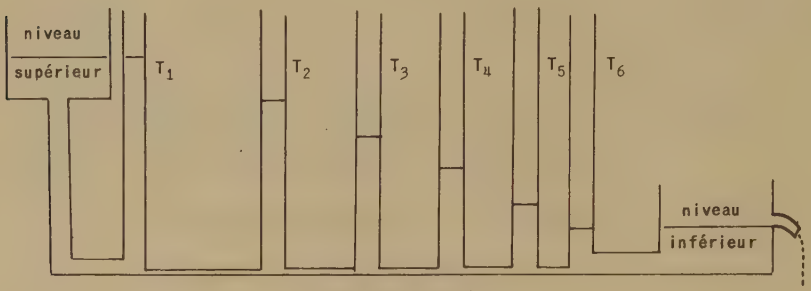


Figure (5-3a)

A et B ont été déterminés par les niveaux correspondants à $r = 2$ et $r = 4$ (tubes T_1 et T_5), ce qui donnait la formule

$$\theta = \frac{56{,}2}{r} - 10{,}6.$$

On voit que les résultats sont concordants.

Tableau 5-3a

Désignation de l'élément	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
Rayon au point M	2,000	2,802	3,302	3,684	4,000	4,272
θ observée	17,5	9,4	6,3	4,7	3,45	2,4
θ calculée	17,5	9,4	6,4	4,66	3,45	2,5

4. — Solution du problème dans le cas de la sphère

Soit donc le tube de flux déterminé comme ci-dessus. Nous le supposons isolé sur les faces extrêmes, en A_0 et A_6 (figure 5-2a) et primitivement à 0°. Le problème peut se poser de deux façons :

1° Au temps $t = 0$ on produit dans l'élément E_1, entre A_0 et A_1 une quantité de chaleur Q qui détermine, pour cet élément E_1 un état instantané de température $\theta_0 = \frac{Q}{\gamma v}$. On se propose de construire les courbes relatives au mouvement de la chaleur (diffusion centrifuge).

2°) Même problème, mais c'est dans l'élément E_6 que se produit l'état subit de température θ_0 (diffusion centripète).

Les deux problèmes, ou plutôt les deux aspects du problème, conduisent à des courbes différentes, ce qui n'était pas à envisager dans le cas du « mur ».

La représentation hydrodynamique se fait dans l'appareil déjà décrit (CH5 - n° 2), en isolant les tubes T_1 et T_6 de l'extérieur et en mettant tous les tubes verticaux initialement au niveau zéro, sauf le tube destiné à recevoir une quantité d'eau initiale l'amenant au niveau y_0 correspondant à la température θ_0.

1°) Cas de la source interne.

Le tableau (5-4a) donne les résultats qui sont illustrés par les courbes des figures (5-4a) et (5-4b).

Tableau 5-4a

T_1 (intérieur de la sphère)		T_2		T_3		T_4		T_5		T_6 (extérieur de la sphère)	
Temps t	Niveau y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	-	0,35	1	-	-	-	-	-	-	-	-
1,33	27	1,33	2,6	1,33	0,3	1,33	0	1,33	0	1,33	0
-	-	2,5	4	2,25	0,7	2,08	0,1	-	-	-	-
3,42	24	3,83	5	4,17	1,4	4,17	0,5	4,42	0,1	4	0
-	-	-	-	-	-	-	-	6,75	0,5	6,33	0,1
9,5	17	-	-	8,83	3	-	-	-	-	-	-
-	-	12,5	6,6	13,58	3,7	11,0	2,0	10,17	1,1	11,66	1,0
-	-	14,67	6,5	15,42	4,0	13,83	2,5	-	-	-	-
-	-	-	-	17,92	4,2	-	-	-	-	17,5	2,1
-	-	19,5	6,3	20,83	4,3	19,0	3,3	21,5	3,0	-	-
22,33	10	23,33	6,0	24,42	4,5	28	4,0	26,0	3,5	24,0	3,0
36,0	7,35	36	5,4	36,0 42,0	4,75 4,80	37,0	4,5	37,0	4,2	37,0	4,05
60,0	5,35	60	5,1	60,0	4,95	60,0	4,85	60,0	4,8	60,0	4,7
100,0	5,1	100,0	5,05	100,0	5	100,0	4,95	100,0	4,9	100,0	4,8
∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0	∞	5,0

Les tableaux et les courbes montrent que le maximum de température de chaque élément n'est bien décelable que pour le premier récepteur, c'est-à-dire pour le tube T_2. Ceci est d'accord

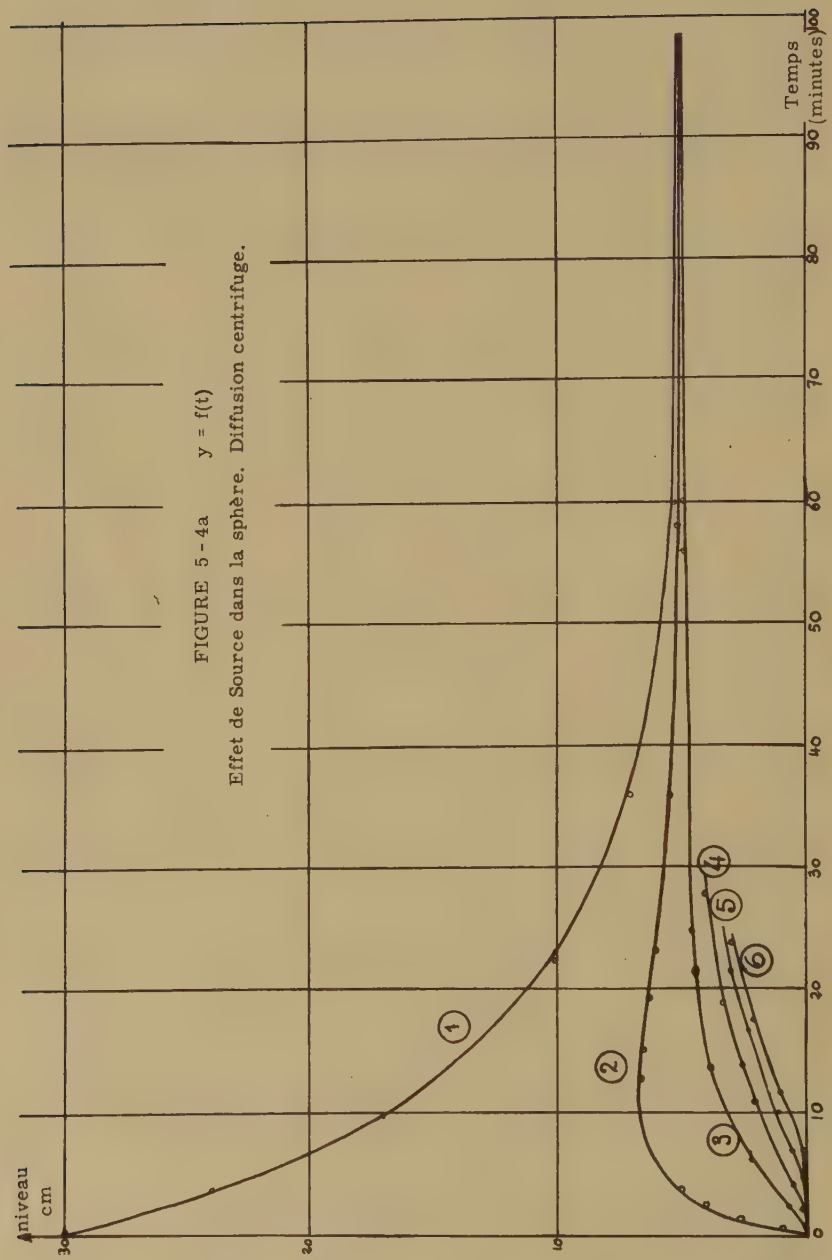


FIGURE 5 - 4a y = f(t)

Effet de Source dans la sphère. Diffusion centrifuge.

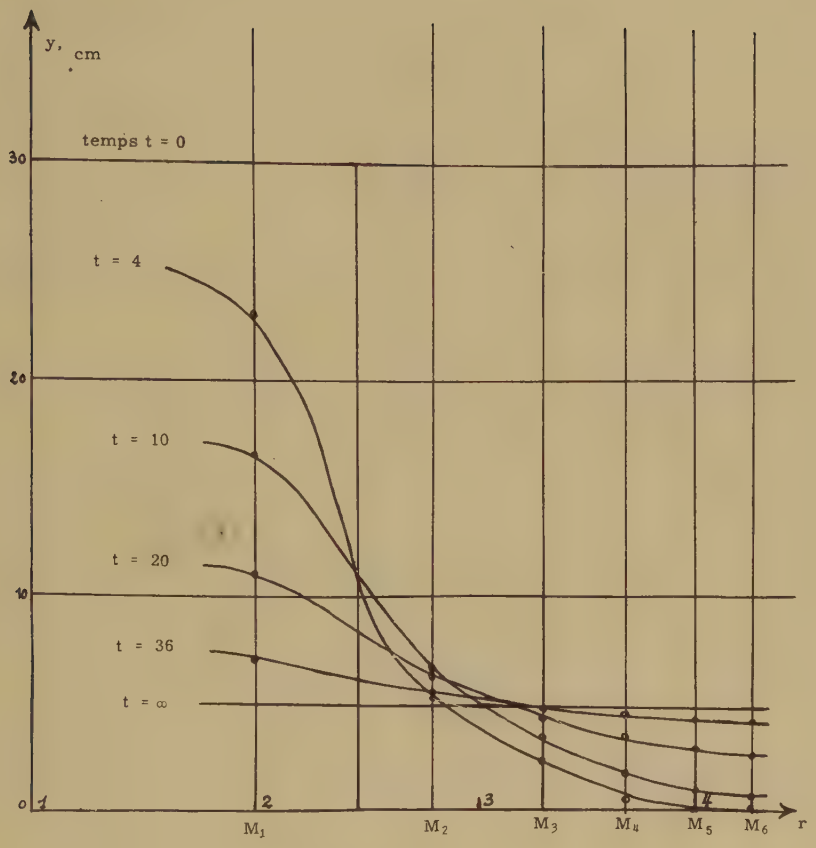


FIGURE 5-4b

y = f(r) à divers temps. Diffusion centrifuge.

avec la théorie générale de la sphère, la résistance des parties centrales étant forte par rapport aux éléments périphériques.

2°) Cas de la source externe.

Le tableau (5-4b) donne les résultats qui sont illustrés par les courbes des figures (5-4c) et (5-4d).

Cette fois les maxima sont nettement accusés, plus encore que dans le cas du « mur » puisqu'on distingue bien jusqu'au 4e élément (compté à partir de la source). Le mouvement d'égalisation est plus rapide, car l'endroit où sè dégage la chaleur possède une résistance moins grande. Les courbes sont d'accord avec la réalité physique.

Tableau 5-4b

T_1 (Intérieur de la sphère)		T_2		T_3		T_4		T_5		T_6 (Extérieur de la sphère)	
Temps	Niveau										
t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25
-	-	-	-	-	-	0,25	0,3	0,25	3,0	-	-
-	-	-	-	0,67	0,05	0,5	0,7	0,5	5,0	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	0,92	7,0	0,84	17
-	-	-	-	1,0	0,2	1,0	2	1,33	8,0	-	-
2,0	0	1,92	0,25	2,83	1,65	-	-	2,0	8,3 M	-	-
-	-	-	-	-	-	2,17	4,0	2,25	8,3	-	-
-	-	-	-	-	-	2,66	4,6	2,42	8,25	-	-
-	-	-	-	-	-	3,33	5,0	3,17	8,0	3,08	10
-	-	-	-	-	-	3,66	5,1	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	3,92	5,2	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	4,25	5,3	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	5,0	5,4	5,42	7,1	5,17	8
-	-	-	-	5,83	3,35	5,92	5,5 M	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	6,83	5,45	-	-	-	-
-	-	-	-	8,66	3,95	7,83	5,40	7,25	6,5	7,17	7,1
-	-	-	-	9,83	4,05	9,08	5,35	9,42	6,1	9,25	6,5
-	-	-	-	11,0	4,15	10,17	5,3	-	-	-	-
-	-	-	-	12,42	4,2	12,25	5,2	12,0	5,7	11,5	6,0
-	-	-	-	14,33	4,3	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15,5 M	4,3	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	17,0	4,3	-	-	-	-	-	-
20	2,1	20	3,6	20	4,25	20	4,8	20	5,05	20	5,1
37	3,4	37	4,0	37	4,22	37	4,45	37	4,5	37	4,5
140	4,1	140	4,15	140	4,2	140	4,2	140	4,2	140	4,2

5. — Utilisation des courbes

En coordonnées sphériques, l'équation fondamentale est

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h}{r} \frac{\partial^2 r\theta}{\partial r^2} \qquad (5\text{-}5a)$$

En posant $u = r\,\theta$ l'équation (5-5a) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \qquad (5\text{-}5b)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, la solution générale de (5-5b) est

$$u = \Sigma c e^{-\omega i r} e^{-\omega^2 \hbar t} \qquad (5\text{-}5c)$$

d'où finalement

$$\theta = \frac{1}{r} \sum c e^{-\omega i r} e^{-\omega^2 \hbar t} \qquad (5\text{-}5d)$$

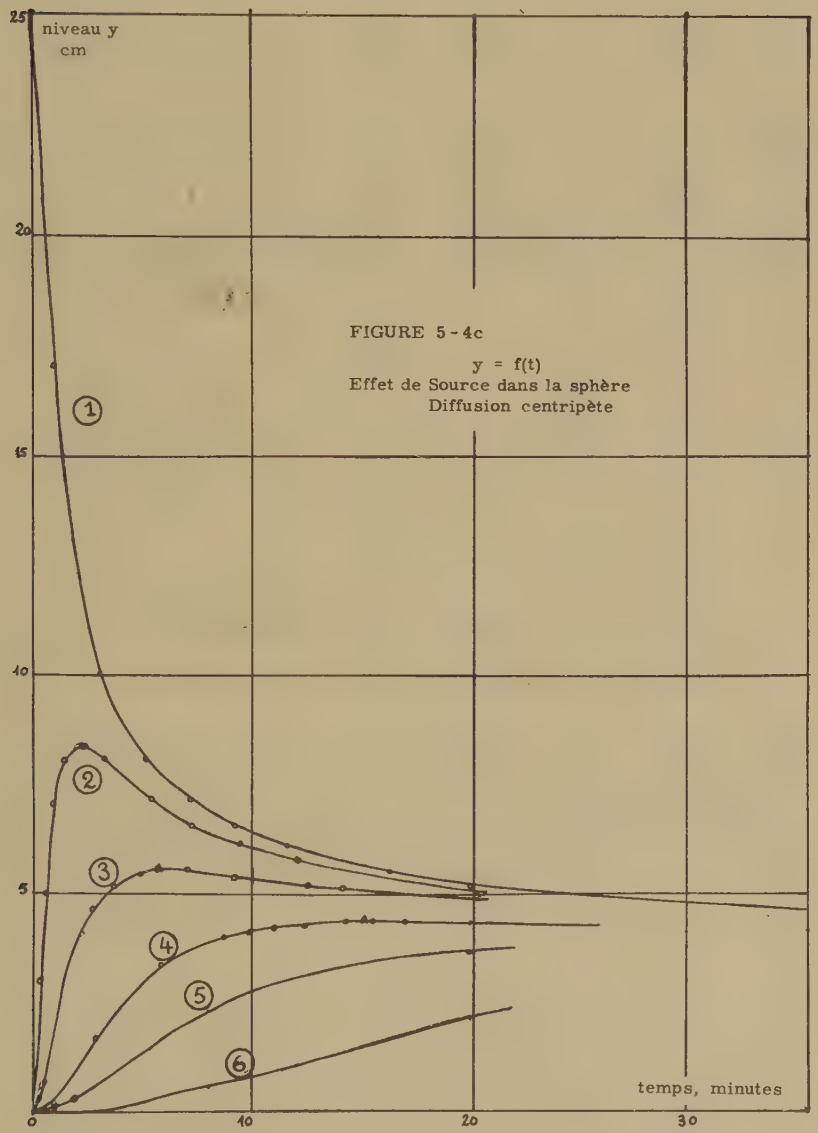
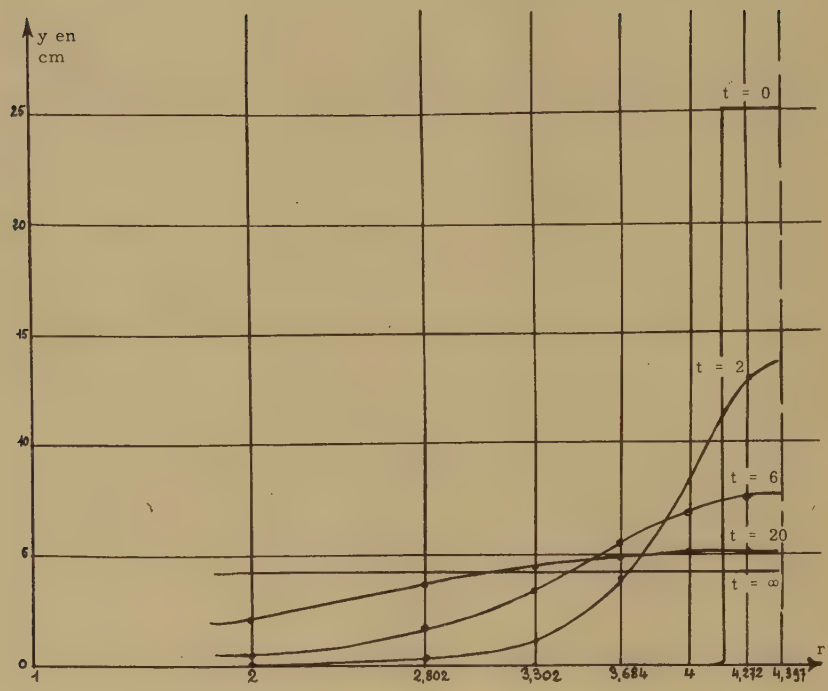


FIGURE 5-4c

y = f(t)
Effet de Source dans la sphère
Diffusion centripète

FIGURE 5 - 4d

y = f(r) à divers temps
Diffusion centripète



Pour *la forme* de la fonction les coefficients c sont multipliés par $\frac{1}{r}$. Quand l'échelle des r varie, elle fait varier celle des θ, *à un facteur constant près,* ce quì signifie que l'on peut encore fixer l'échelle des θ sur les graphiques, si l'on se fixe sur ces graphiques deux températures en accord avec les conditions du calcul projeté.

Quant au reste, qui ne dépend que des exponentielles, nous retrouvons ce que nous avons déjà vu au N° 4 du chapitre précédent.

En définitive nous retrouvons la même règle d'universalité des graphiques.

Cependant, ici, le *rapport* $\frac{r_n}{r_o}$ *intervient car il détermine* les *conditions de similitude géométrique.* Deux expériences seront semblables et les graphiques de l'une conviendront aux graphiques de l'autre si le rapport de 2 rayons *homologues* est constant.

Il est normal que nous retrouvions les mêmes règles d'application des graphiques pour la sphère et pour le « mur ». Ce dernier peut être considéré comme la limite d'une sphère. D'autre part, comme *tout problème* thermique peut être assimilé à une somme de problèmes à sources ponctuelles radiantes, les règles d'interprétation sont valables pour *tout graphique* relatif à la chaleur.

6. — Problèmes cylindriques et cas le plus général

Nous n'exposons pas d'expérience pour le cas de problèmes cylindriques, car elle n'apporterait rien de bien nouveau. Etant donné un tube de flux relatif à un problème cylindrique (figure 5-6a) il suffit de le sectionner en des éléments de capacité calorifique déterminée, proportionnelle au volume, et que l'on représentera hydrauliquement par des tubes verticaux de capacité proportionnelle. On doit par exemple, si l'on veut des capacités élémentaires toutes égales, et donc représentées hydrauliquement par des tubes verticaux égaux, choisir les rayons

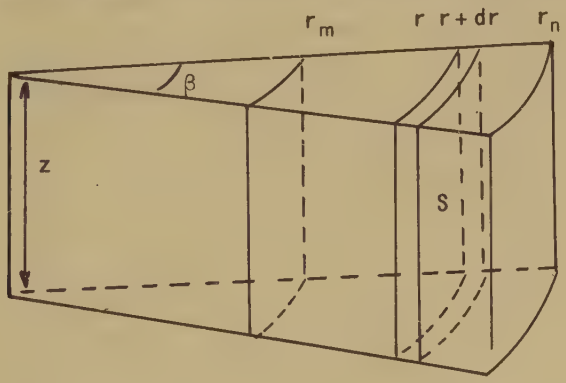


Figure (5-6a)

$$r_0,\ r_1,\ r_2 \ldots\ldots$$

de sorte que

$$r_1^2 - r_0^2 = r_2^2 - r_1^2 = \ldots\ldots = r_p^2 - r_{p-1}^2 \ldots\ldots \qquad (5\text{-}6a)$$

La résistance ρ entre deux sections de rayons r_m et r_n est calculée de façon analogue à ce que nous avons vu pour la sphère : entre 2 faces r et $r + dr$ la résistance est $\frac{dr}{KS}$ où $S = br$, b étant

un facteur de proportionnalité. Pour un angle dièdre β et une hauteur z unité, b vaut β. De toutes façons

$$\rho = \int_{r_m}^{r_n} \frac{dr}{kbr} = \frac{1}{kb} \operatorname{Loge} \frac{r_n}{r_m} \qquad (5\text{-}6b)$$

...D'où la *longueur réelle* des tubes capillaires à choisir.

*
* *

Enfin, pour des tubes de flux plus compliqués, la constitution d'un modèle hydraulique se fera de façon tout à fait analogue en choisissant, par exemple, des éléments équivolumétriques et en déterminant les résistances qui y correspondent.

CHAPITRE VI

CALCUL DES COURBES HYDRODYNAMIQUES

1. — Equations générales des analogies hydrodynamiques

Soit une analogie hydrodynamique formée par des éléments T_1, T_2 .... T_{p-1} T_p T_{p+1} .... T_n *en nombre fini n,* de niveau y_1 y_2 .... y_n, ce qui crée les dénivellations successives z_2 z_3..... non infiniment petites (comptées *positives* ou négatives suivant que y va en décroissant ou en croissant). Pour signifier que z_p représente la dénivellation relative au tube T_p (entre T_{p-1} et T_p) au temps t nous écrirons $z_p(t)$ etc... La résistance $\frac{l}{K\sigma}$ du tube capillaire correspondant sera appelée ρ_p.

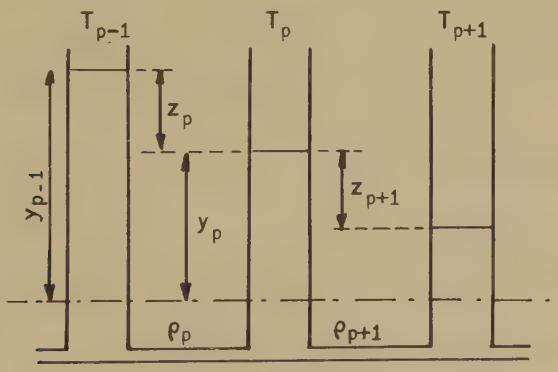


Figure (6-1a)

Nous proposons d'écrire l'équation du mouvement de l'eau pour le tube T_p, c'est-à-dire les variations de z_p (des valeurs de z

on peut passer facilement à celle des y) en supposant que les éléments T ont tous la même capacité hydrodynamique C_1.

Nous procédons ainsi :

— *Eau reçue* par T_p en dt (positive ou négative). — Elle se décompose en 2 quantités provenant l'une de T_{p-1} l'autre de T_{p+1}

$$dq = \left(\frac{1}{\rho_p} z_p - \frac{1}{\rho_{p+1}} z_{p+1} \right) dt \qquad (6\text{-}1a)$$

d'après la loi des tubes capillaires (voir N° 3-3).

— *Le niveau* de T_p monte de ce fait d'une quantité

$$dy_p = \frac{dq}{C_1}$$

$$dy_p = \left(\frac{1}{\rho_p C_1} z_p - \frac{1}{\rho_{p+1} C_1} z_{p+1} \right) dt \qquad (6\text{-}1b)$$

— De même le niveau de T_{p-1} est monté de la quantité

$$dy_{p-1} = \left(\frac{1}{\rho_{p-1} C_1} z_{p-1} - \frac{1}{\rho_p C_1} z_p \right) dt \qquad (6\text{-}1c)$$

— La nouvelle dénivellation $z_p\,(t+dt)$ vaut donc :

dénivellation précédente + montée de T_{p-1} — montée de T_p

$$z_p\,(t+dt) = z_p\,(t) + \left(\frac{1}{\rho_{p-1} C_1} z_{p-1} - \frac{1}{\rho_p C_1} z_p - \frac{1}{\rho_p C_1} z_p + \frac{1}{\rho_{p+1} C_1} z_{p+1} \right) dt \qquad (6\text{-}1d)$$

Comme dt est aussi petit que l'on veut la quantité

$$\frac{z_{p\,(t+dt)} - z_{p\,(t)}}{dt}$$

n'est autre que $\dfrac{\partial z_p}{\partial t}$ ou z'_p

d'où (6-1d) devient

$$z'_p = -\frac{2}{\rho_p C_1} z_p + \frac{1}{\rho_{p-1} C_1} z_{p-1} + \frac{1}{\rho_{p+1} C_1} z_{p+1} \qquad (6\text{-}1e)$$

et, en posant pour simplifier : $\dfrac{1}{\rho_p C_1} = g_p$, etc...

$$z'_p = -2\, g_p\, z_p + g_{p-1}\, z_{p-1} + g_{p+1}\, z_{p+1} \qquad (6\text{-}1f)$$

L'équation (6-1f) est l'*équation fondamentale* du mouvement dans les éléments hydrodynamiques. Elle se vérifie *pour tous les éléments* de l'appareillage *sauf pour le premier ou le dernier.*

2. — Equations des niveaux pour les tubes extrêmes

Pour les *tubes extrêmes* l'équation générale sera modifiée parce que ces tubes ne sont pas en communication en amont ou en aval avec des tubes semblables.

Ordinairement, ils sont, soit isolés, soit en communication avec des réservoirs à niveau constant.

Nous nous bornerons à ces cas, la généralisation étant facile à comprendre, sinon toujours facile à exécuter.

I. — Le premier tube T_1 est isolé en deçà. Il n'y a pas de terme z_1, ou, si l'on veut, $z_1 = 0$; le terme en z_2 commence la série (fig. 6-2a) et s'exprimera :

$$z'_2 = -2g_2z_2 + g_3 z_3 \qquad (6\text{-}2a)$$

ainsi qu'on peut s'en rendre compte en analysant le mouvement, comme on l'a fait pour les autres tubes.

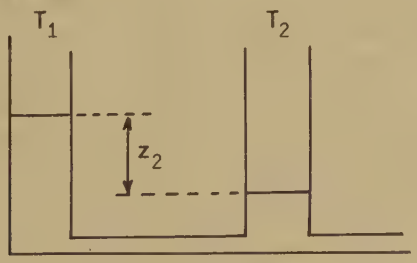


Figure (6-2a)

L'équation (6-2a) est la première dans le système des équations (6-1f).

II. — Le dernier tube T_n est isolé en delà (figure 6-2b). Il y

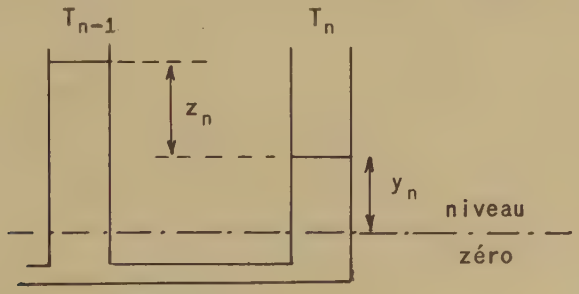


Figure (6-2b)

a bien un terme en z_n mais pas de terme en z_{n+1}. La *dernière* des équations (6-1f) devient :

$$z'_n = -2g_n z_n + g_{n-1} z_{n-1} \qquad (6\text{-}2b)$$

Il y aura lieu d'y adjoindre l'équation qui donne y_n, en remarquant que y_n est l'augmentation du niveau de T*n* par unité de temps soit $g_n z_n$, d'où :

$$y'_n = -g_n z_n \qquad (6\text{-}2c)$$

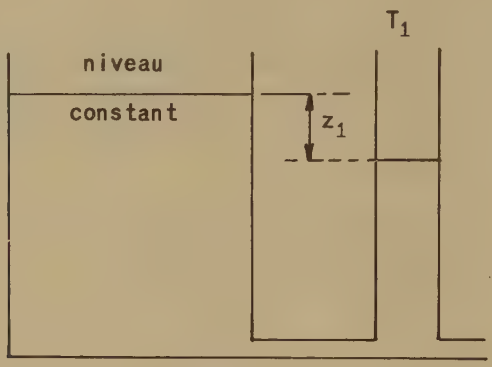


Figure (6-2c)

III. — Le premier tube T_1 est en rapport avec un réservoir à niveau constant (figure 6-2c). En établissant les gains et pertes de chaleur comme précédemment on trouve une première équation en z_1 :

$$z'_1 = -g_1 z_1 + g_2 z_2 \qquad (6\text{-}2d)$$

car l'augmentation de z_1 pendant le temps dt provient *uniquement* de la diminution de niveau en T_1.

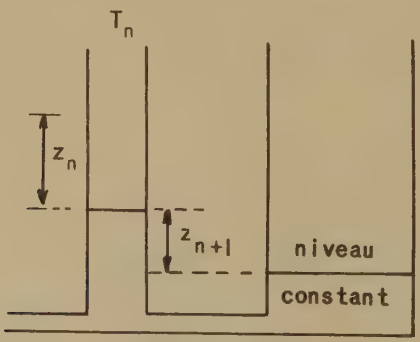


Figure (6-2d)

IV. — Le dernier tube T_n est en communication en delà avec

un réservoir à niveau constant. Le même raisonnement conduit à l'équation finale :

$$z'_{n+1} = - g_{n+1} z_{n+1} + g_n z_n \qquad (6\text{-}2e)$$

la dénivellation z_{n+1} correspond à la différence de niveau entre T_n et le réservoir (fig. 6-2d).

Dans ce cas il est commode de prendre comme niveau zéro le niveau constant du réservoir placé au-delà de T_n.

3. — Solution générale des équations [1]

Il résulte de ce qui précède que les équations du mouvement forment généralement un système linéaire de n équations différentielles homogènes du premier ordre et du premier degré.

Les solutions [2] sont de la forme

$$z_p = \sum_{m=1}^{m=n} \lambda_{(p,m)} e^{-\omega_m t} \qquad (6\text{-}3a)$$

une solution particulière du problème étant

$$z_p = \lambda_{(p,m)} e^{-\omega_m t} \qquad (6\text{-}3b)$$

où p varie de 1 à n.

En remplaçant z_p par la valeur (6-3b) dans le système initial (6-1f) on trouve n équations de condition de la forme

$$\begin{aligned} - \omega \lambda_{(p,m)} e^{-\omega_m t} = & - 2g_p \lambda_{(p,m)} e^{-\omega_m t} \\ & + g_{p-1} \lambda_{(p-1,m)} e^{-\omega_m t} \\ & + g_{p+1} \lambda_{(p+1,m)} e^{-\omega_m t} \end{aligned} \qquad (6\text{-}3c)$$

ou encore en divisant par $e^{-\omega_m t}$

$$- g_{p-1} \lambda_{(p-1,m)} + (2g_p - \omega_m) \lambda_{(p,m)} - g_{p+1} \lambda_{(p+1,m)} = 0 \qquad (6\text{-}3d)$$

On a donc n équations homogènes de condition entre les λ.

Comme ces derniers ne sont pas tous nuls, il faut que le déterminant des coefficients des λ soit nul, ce qui donne (dans le cas des tubes extrêmes isolés par exemple) :

$$D = \begin{vmatrix} 2g_1 - \omega & - g_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ - g_1 & 2g_2 - \omega & - g_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & - g_2 & 2g_3 - \omega & g_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (2g_{n-1} - \omega) & & g_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - g_{n-1} & 2g_n - \omega & \end{vmatrix} = 0 \qquad (6\text{-}3e)$$

(1) Le présent exposé étant abstrait parce que général, voir un exemple d'application au numéro suivant.

(2) Voir pour cela Goursat II, p. 505, Valiron, p. 183 et tous les traités d'analyse.

Ce déterminant est l'équivalent d'une équation du n^e degré pour ω, d'où en général n racines; la solution générale de l'équation (6-3a) est donc obtenue par la combinaison des n racines, ce qui fait varier m de 1 à n.

S'il y avait des racines doubles on aurait à faire intervenir des polynômes du 1er degré en t; de même pour les racines d'ordre q on aurait à faire intervenir des polynômes de degré (q-1) [3].

Mais en fait il n'y a jamais de polynômes. Dans le déterminant (6-3e) il est à noter que les termes g sont posés dès le début du problème comme définissant le milieu : dimensions, conductibilité, capacité thermique.

Quant aux n^2 paramètres λ, on les obtient ainsi :

1°) En faisant dans (6-3d) m égal successivement à 1, 2.... n, et en y faisant aussi, de manière indépendante, p égal à 1, 2, ... n on trouve n^2 équations. De ces n^2 équations, en réalité, il y en a n (n-1) indépendantes seulement puisqu'il faut tenir compte du déterminant D, nul *pour chacune des n valeurs* de ω.

2°) En ajoutant à ces n (n-1) équations les n équations obtenues en faisant $t = o$ dans l'équation (6-3b), ce qui décrit la *forme de l'équation des niveaux au temps zéro.*

On obtient ainsi n^2 équations pour déterminer n^2 paramètres.

Les valeurs des y, sommes des valeurs z, ont la même forme que les z.

Le problème est résolu.

Il nous reste à voir une application de cette théorie à un cas particulier.

4. — Application à un exemple particulier

Nous allons résoudre de cette façon le problème suivant :

Représentation hydrodynamique de l'établissement de l'équilibre thermique dans un « mur » homogène primitivement mis en contact avec un milieu chaud d'un côté, froid de l'autre, jusqu'à l'établissement du régime permanent; quand ce régime a été établi, on isole subitement les deux faces du mur, en un temps que l'on choisit pour origine ($t = o$). Comment la chaleur se répartit-elle ensuite dans le mur isolé ?

Hydrodynamiquement la représentation est celle donnée par la figure (6-4a). Le premier tube T_1 est en relation avec une source à niveau constant supérieur T_s, par un tube muni d'un robinet r_s;

(3) Goursat II, p. 506. Valiron, p. 186, etc...

le dernier tube est de même en relation avec une source à niveau constant inférieur T_i par un tube muni d'un robinet r_i.

Au temps zéro on ferme à la fois les robinets r_s et r_i, lorsque le régime permanent a été établi.

Nous allons établir les équations du mouvement pour un nombre variable d'éléments afin d'en tirer quelques conséquences, et nous conduirons le calcul jusqu'à un nombre infini d'éléments.

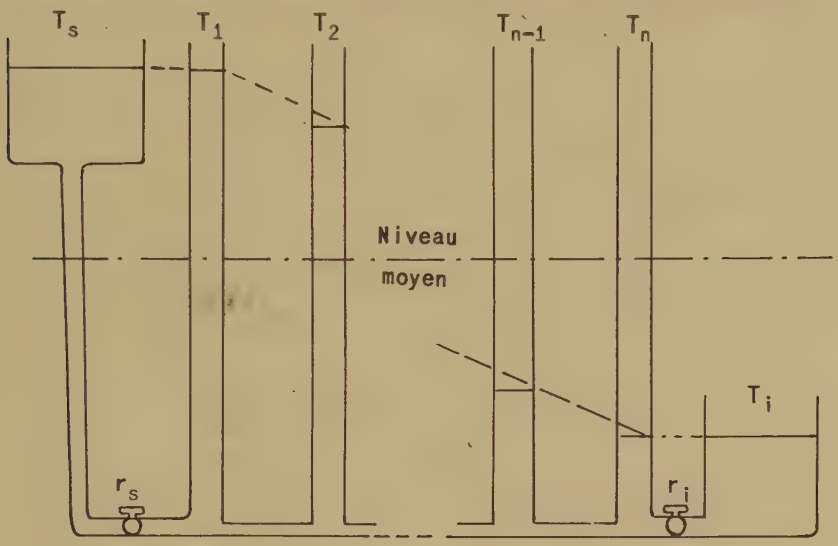


Figure (6-4a)

Nous remarquerons une première simplification : il est évident que, par raison de symétrie, le mouvement de l'eau va se faire autour d'un niveau qui est le niveau moyen entre le niveau du tube T_1 et le niveau du tube T_n. Ce niveau, si le nombre d'éléments T est impair, est celui du tube $T_{\frac{n+1}{2}}$, niveau qui ne variera pas. On pourra donc établir le mouvement avec la moitié d'éléments, le dernier étant à niveau constant. Les courbes totales s'obtiendront en prolongeant les courbes au-delà du point moyen par une simple construction symétrique. C'est une de ces simplifications connues qui ont lieu couramment dans les problèmes similaires.

On obtient alors la représentation de la figure (6-4b). Le montage ressemble au précédent, mais le niveau inférieur T_i est mis en communication *large* avec le tube $T_{\frac{n+1}{2}}$ et cette communi-

cation reste ouverte. Au temps zéro on ferme seulement le robinet r_s.

Il est même inutile de conserver l'élément $T_{\frac{n+1}{2}}$, puisque son niveau est le même que celui de T_i; il suffira de joindre l'élément $T_{\frac{n-1}{2}}$ au bassin T_i par une résistance analogue à celle qui existait entre $T_{\frac{n-1}{2}}$ et $T_{\frac{n+1}{2}}$.

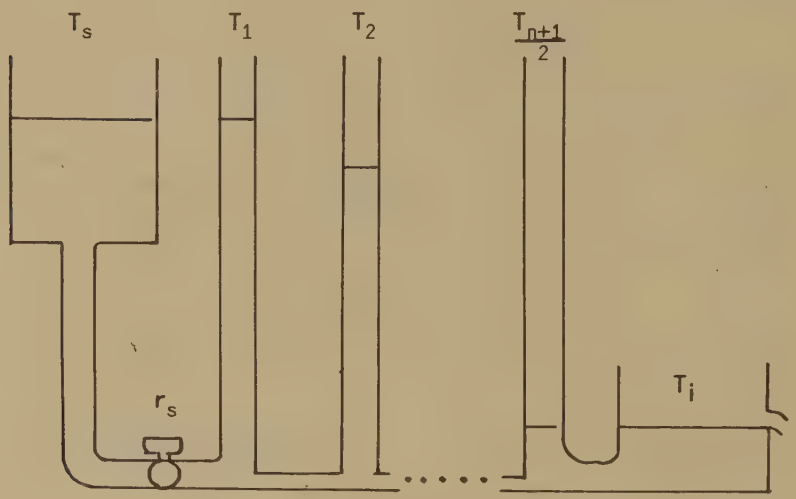


Figure (6-4b)

Une autre simplification dans le calcul provient de ce que les coefficients g sont égaux. D'autre part pour $t = o$ toutes les dénivellations sont égales, à partir de z_2

$$z_2\,(t=0) = z_3\,(t=0) \ldots = z_{\frac{n+1}{2}}\,(t=0) \qquad (6\text{-}4a)$$

5. — Calcul du précédent pour $n = 9$

Avec les simplifications précédentes le problème est résolu avec 4 éléments selon la figure 6-5a, en fermant le robinet r_s pour $t = o$.

Le terme en z_1 n'existe pas.

L'équation (6-1f) donne, avec l'équation (6-2a) pour le premier tube, et l'équation (6-2e) pour le dernier niveau :

$$\left.\begin{aligned} z'_2 &= -2gz_2 + gz_3 \\ z'_3 &= -2gz_3 + gz_2 + gz_4 \\ z'_4 &= -2gz_4 + gz_3 + gz_5 \\ z'_5 &= -\ gz_5 + gz_4 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5a)$$

L'équation (6-3a) donne comme solution particulière :

$$z_p = \lambda_p\, e^{-\omega_{(m)} t} \qquad (6\text{-}5b)$$

et comme solution générale :

$$z_p = \sum_{m=1}^{m=4} \lambda_{(p,m)}\, e^{-\omega_m t} \qquad (6\text{-}5c)$$

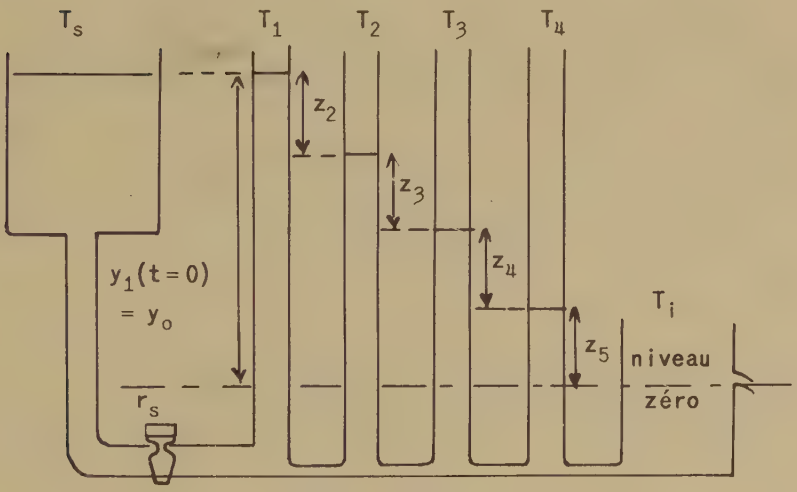


Figure (6-5a)

En portant (6-5b) dans le système (6-5a) on trouve le système suivant d'équations aux conditions (Voir l'équation 6-3c) :

$$\left.\begin{aligned} (2g - \omega)\,\lambda_2 - g\lambda_3 &= 0 \\ -g\ \lambda_2 + (2g - \omega)\,\lambda_3 - g\lambda_4 &= 0 \\ -g\lambda_3 + (2g - \omega)\,\lambda_4 - g\lambda_5 &= 0 \\ -g\lambda_4 + (g - \omega)\,\lambda_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}5d)$$

qu'on peut simplifier en divisant par g et en posant $\dfrac{\omega}{g} = \omega'$

$$\left.\begin{array}{rrrr} (2-\omega')\,\lambda_2 - \lambda_3 & +0 & +0 & =0 \\ -\lambda_2 + (2-\omega')\,\lambda_3 & -\lambda_4 & & =0 \\ 0-\lambda_3 + (2-\omega')\,\lambda_4 & & -\lambda_5 & =0 \\ 0+0 & -\lambda_4 + (1-\omega')\,\lambda_5 & & =0 \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5e)$$

Comme les paramètres λ ne sont pas tous nuls, sans quoi il n'y aurait pas même la possibilité d'envisager une solution, il faut que :

$$D = \begin{vmatrix} (2-\omega') & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\omega') & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-\omega') & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (1-\omega') \end{vmatrix} = 0 \quad (6\text{-}5f)$$

Ce qui donne, en posant $2-\omega' = a$

$$a^4 - a^3 - 3a^2 + 2a + 1 = 0 \quad (6\text{-}5g)$$

La solution de cette équation du 4° degré est facile.

En effet une des racines est évidemment $a = 1$ puisque la somme des cœfficients est nulle, ce qui ramène à l'équation du 3° degré.

$$a^3 - 3a - 1 = 0 \quad (6\text{-}5h)$$

dont les raçines valent :

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

or les deux nombres :

$$\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$$

ont pour module 1 et pour argument $\pm$ arc $tg\ \sqrt{3}$, c'est-à-dire : $\pm\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$

Les 3 valeurs de a tirées de (6-5h) ont pour expression :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3}\right)$$

où n vaut 0, 1, 2 par exemple;
d'où les 3 valeurs :

$$2\ \text{Cos}\ 20°,\ 2\ \text{Cos}\ 140°,\ 2\ \text{Cos}\ 260°$$

On a donc au total :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1{,}8794 \\ a_3 &= -1{,}532 \\ a_4 &= -0{,}3472 \end{aligned}$$

Ce qui donne ($\omega' = 2 - a$) :

$$\left.\begin{array}{lcl} \omega'_1 = 1 & : & \omega_1 = g \\ \omega'_2 = 0{,}1206 & : & \omega_2 = 0{,}1206g \\ \omega'_3 = 3{,}5320 & : & \omega_3 = 3{,}5320g \\ \omega'_4 = 2{,}3472 & : & \omega_4 = 2{,}3472g \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5j)$$

En portant chacune des valeurs de ω' dans le système (6-5e) on obtient 4 systèmes différents :

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda(2,1) - \lambda(3,1) & = 0 \\ -\lambda(2,1) + \lambda(3,1) - \lambda(4,1) & = 0 \\ -\lambda(3,1) + \lambda(4,1) - \lambda(5,1) & = 0 \\ -\lambda(4,1) & = 0 \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5k)$$

$$\left.\begin{array}{rl} 1{,}8794\,\lambda(2,2) - \lambda(3,2) & = 0 \\ -\lambda(2,2) + 1{,}8794\,\lambda(3,2) - \lambda(4,2) & = 0 \\ -\lambda(3,2) + 1{,}8794\,\lambda(4,2) - \lambda(5,2) & = 0 \\ -\lambda(4,2) + 0{,}8794\,\lambda(5,2) & = 0 \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5k')$$

$$\left.\begin{array}{rl} -1{,}532\,\lambda(2,3) - \lambda(3,3) & = 0 \\ -\lambda(2,3) - 1{,}532\,\lambda(3,3) - \lambda(4,3) & = 0 \\ -\lambda(2,3) - 1{,}532\,\lambda(4,3) - \lambda(5,3) & = 0 \\ -\lambda(4,3) - 2{,}532\,\lambda(5,3) & = 0 \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5k'')$$

$$\left.\begin{array}{rl} -0{,}3472\,\lambda(2,4) - \lambda(3,4) & = 0 \\ -\lambda(2,4) - 0{,}3472\,\lambda(3,4) - \lambda(4,4) & = 0 \\ -\lambda(3,4) - 0{,}3472\,\lambda(4,4) - \lambda(5,4) & = 0 \\ -\lambda(4,4) - 1{,}3472\,\lambda(5,4) & = 0 \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5k''')$$

Ce qui, joint à la condition aux limites :

$$z_2(t=0) = z_3(t=0)\; z_4(t=0) = z_5(t=0) = \frac{y_0}{4} \quad (6\text{-}5l)$$

transformée en λ, soit (puisque, pour $t = o$, $e^{-\omega t} = 1$) :

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda(2,1) + \lambda(2,2) + \lambda(2,3) + \lambda(2,4) & = \\ \lambda(3,1) + \lambda(3,2) + \lambda(3,3) + \lambda(3,4) & = \\ \lambda(4,1) + \lambda(4,2) + \lambda(4,3) + \lambda(4,4) & = \\ \lambda(5,1) + \lambda(5,2) + \lambda(5,3) + \lambda(5,4) & = \dfrac{y_0}{4} \end{array}\right\} \quad (6\text{-}5m)$$

permet de déterminer les divers cœfficients λ.

Tous calculs faits, nous trouvons, en faisant $yo = 1$:

$$\left.\begin{aligned}
z_2 &= \frac{0{,}431}{4} e^{-0{,}1206\,gt} + \frac{0{,}333}{4} e^{-gt} + \frac{0{,}052}{4} e^{-3{,}532\,gt} + \frac{0{,}184}{4} e^{-2{,}347\,gt} \\
z_3 &= \frac{0{,}810}{4} e^{-0{,}1206\,gt} + \frac{0{,}333}{4} e^{-gt} - \frac{0{,}080}{4} e^{-3{,}532\,gt} - \frac{0{,}064}{4} e^{-2{,}347\,gt} \\
z_4 &= \frac{1{,}091}{4} e^{-0{,}1206\,gt} + 0 + \frac{0{,}070}{4} e^{-3{,}532\,gt} - \frac{0{,}161}{4} e^{-2{,}347\,gt} \\
z_5 &= \frac{1{,}241}{4} e^{-0{,}1206\,gt} - \frac{0{,}333}{4} e^{-gt} - \frac{0{,}028}{4} e^{-3{,}532\,gt} + \frac{0{,}120}{4} e^{-2{,}347\,gt}
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}5n)$$

Du système (6-5n) donnant les dénivellations on passe facilement aux niveaux eux-mêmes $y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5$, en remarquant que $y_5 = 0$, que $y_4 = z_5$, $y_3 = z_5 + z_4$, etc... et en posant pour simplifier les écritures :

$$\left.\begin{aligned}
e^{-0{,}1206\,gt} &= f_1 ; \quad e^{-gt} = f_2 \\
e^{-3{,}532\,gt} &= f_3 ; \quad e^{-2{,}347} = f_4
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}5n)$$

$$\left.\begin{aligned}
y_1/yo &= 0{,}893\,f_1 + 0{,}083\,f_2 + 0{,}0035\,f_3 + 0{,}0199\,f_4 \\
y_2/yo &= 0{,}785\,f_1 + 0{,}0\ f_2 - 0{,}0095\,f_3 - 0{,}0026\,f_4 \\
y_3/yo &= 0{,}583\,f_1 - 0{,}083\,f_2 + 0{,}0015\,f_3 - 0{,}010\ f_4 \\
y_4/yo &= 0{,}310\,f_1 - 0{,}083\,f_2 - 0{,}007\ f_3 + 0{,}030\ f_4 \\
y_5/yo &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}5p)$$

Pour passer maintenant au problème tel qu'il a été posé au n° 4 de ce chapitre, il faudra supposer l'appareillage hydrodynamique constitué par 9 éléments, le mouvement de l'eau dans les 5 premiers étant donné par les 5 équations (6-5p). Le mouvement de l'eau dans les 4 derniers étant donné par :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y_6}{y_0} &= -\frac{y_4}{y_0} & \frac{y_8}{y_0} &= -\frac{y_2}{y_0} \\
\frac{y_7}{y_0} &= -\frac{y_3}{y_0} & \frac{y_9}{y_0} &= -\frac{y_1}{y_0}
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}5q)$$

Pour les équations de la chaleur il suffira de remplacer :

$$\frac{yp}{yo} \quad \text{par} \quad \frac{\theta p}{\theta o}$$

et g par son équivalent thermique $\frac{k}{\gamma}$.

Les courbes des figures (6-5a) et (6-5b) illustrent les résultats, donnés par le tableau (6-5a) où g est supposé égal à 1.

Le problème est entièrement traité.

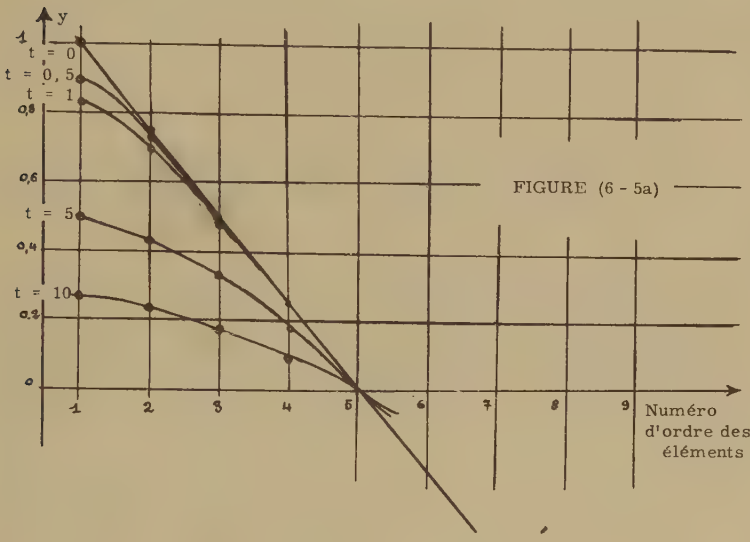


FIGURE (6 - 5a)

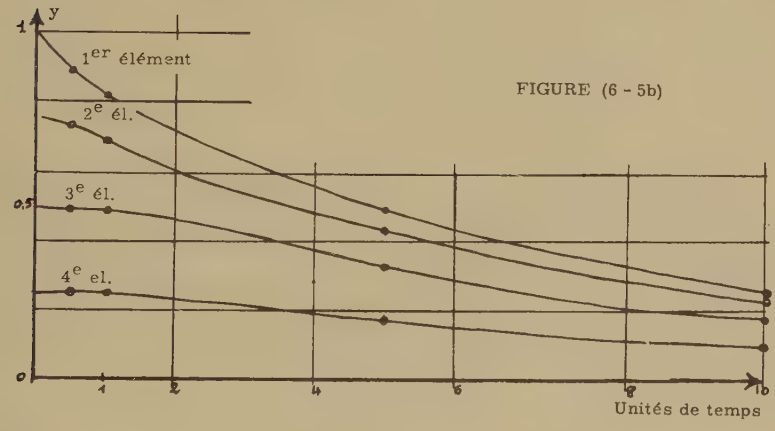


FIGURE (6 - 5b)

TABLEAU (6-5a)

Valeur des niveaux en fonction du temps

Temps	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
0	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1
0,5	0,89	0,73	0,49	0,25	0	-0,25	-0,49	-0,73	-0,89
1	0,82	0,69	0,48	0,24	0	-0,24	-0,48	-0,69	-0,82
5	0,49	0,43	0,32	0,17	0	-0,17	-0,32	-0,43	-0,49
10	0,26	0,23	0,17	0,09	0	-0,09	-0,17	-0,23	-0,26
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0

6. — Calcul relatif au même problème pour un nombre variable d'éléments :

Remarques préliminaires

Relativement à ce problème nous avons fait le calcul des niveaux pour plusieurs appareillages, afin d'en tirer des conclusions pratiques par la comparaison des résultats. Avant d'exprimer ces résultats obtenus par la méthode décrite (et les méthodes auxiliaires mentionnées plus loin), deux remarques sont nécessaires.

1° *Par raison de commodité* nous avons pris pour y_0 le niveau initial du premier tube vertical. Mais ce niveau est l'image hydrodynamique de la température du *milieu du premier élément* du mur dans le problème thermique. L'abscisse du point représenté dépend du nombre d'éléments.

Si on veut faire une étude comparative il faut traiter le problème avec *les faces elles-mêmes* du mur à une température $+\theta_0$ et $-\theta_0$ (au temps zéro).

Ce sont ces deux températures qui correspondent à ce que nous avons appelé y_0 et $-y_0$. Dans ce cas, le *niveau initial* du *premier élément* ne peut être y_0, mais dépend du nombre d'éléments; nous appellerons ce niveau y_1 $(t = 0)$.

Un calcul tout à fait simple permet de calculer y_1 $(t = 0)$ connaissant le nombre *total* n d'éléments pris entre les faces du mur primitivement à θ_0 et $-\theta_0$.

On a (fig. 6-6a) :

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{n-1}{n} \qquad (6\text{-}6a)$$

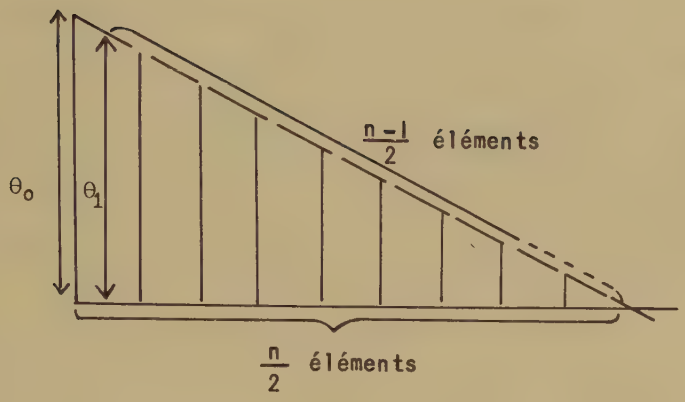


Figure (6-6a)

de même :

$$y_1 = y_0 \frac{n-1}{n} \qquad (6\text{-}6b)$$

En prenant pour toutes les expériences la représentation du *même phénomène* avec des éléments en nombre différent, nous pouvons poser $y_0 = 1$:

$$y_1 = \frac{n-1}{n} \qquad (6\text{-}6c)$$

Nous avons fait les calculs, non seulement pour 9 éléments mais aussi pour 2, 3, 5, 7, ce qui donne :

Tableau 6-6a

n	$y_1(t=0)$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{4}{5}$
7	$\frac{6}{7}$
9	$\frac{8}{9}$

2° *La quantité* g *n'est pas la même pour chaque expérience,*

En effet $g = \dfrac{1}{\rho c}$ (voir n° 1 du chapitre).

Or, les éléments sont d'autant plus petits qu'ils sont plus nombreux. Si par exemple un élément est divisé en m éléments, le même tube de flux est tronçonné en m sections. Les longueurs deviennent m fois plus petites, les résistances deviennent m fois plus petites. Les capacités deviennent elles aussi m fois plus petites (la section du tube de flux n'a pas varié, mais seulement la longueur des tronçons) ; g devient donc en tout m^2 fois plus grand. Or m est lié au nombre n d'éléments par une relation de la forme $n = am$. On peut poser, pour la comparaison des résultats $a = 1$ et $g = 1$ pour $n = 1$ [4]. L'exposant de la solution particulière :

$$z = \lambda\, e^{-g\omega' t}$$

deviendra $-n^2\omega' t$, d'où :

$$z = \lambda\, e^{-n^2\omega' t} \qquad \text{(6-6d)}$$

ce qui affectera de la même façon les exposants de c dans les valeurs de y.

7. — Résultat des calculs pour un nombre variable d'éléments

Avec les deux corrections que nous avons exposées au n° précédent, les équations des courbes hydrodynamiques sont données dans les tableaux suivants :

Tableau 6-7a

Solution du Problème avec 2 éléments

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 0{,}500\, e^{-8t} \\ y_2 &= -0{,}500\, e^{-8t} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} n &= 2 \\ y_1\,(t=0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4) Soit $g = \dfrac{1}{\rho c}$; la résistance relative à une longueur l_1 de capillaire est donné par :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{K_\sigma}{l_1}$$

la capacité est donnée par $c = c_1 l_1$; c_1 étant la capacité unitaire.

Si l_1 est relatif à $n = 1$ (épaisseur du mur) faire $g = 1$ pour $n = 1$, c'est faire :

$$\frac{K_\sigma}{l_1^2 c_1} = 1$$

TABLEAU 6-7b

Solution avec 3 éléments

$y_1 = \quad 0{,}666\, e^{-9t}$ $y_2 = \quad 0$ $y_3 = -\,0{,}666\, e^{-9t}$	$n = 3$ $y_1\,(t = o) = 0{,}666$

TABLEAU 6-7c

Solution avec 5 éléments

$y_1 = 0{,}757\, e^{-9{,}55t} + 0{,}04223\, e^{-65t}$ $y_2 = 0{,}468\, e^{-9{,}55t} - 0{,}0680\ e^{-65t}$ $y_3 = 0 \quad y_4 = -y_2 \quad y_5 = -y_1$	$y_1\,(t = o) = 0{,}800$ $y_2\,(t = o) = 0{,}400$ $n = 5$

TABLEAU 6-7d

Solution avec 7 éléments ($n = 7$)

$y_1 = 0{,}784\, e^{-9{,}702t} + 0{,}063\, e^{-76t} + 0{,}009\, e^{-147t}$ $y_2 = 0{,}628\, e^{-9{,}702t} - 0{,}036\, e^{-76t} - 0{,}021\, e^{-147t}$ $y_3 = 0{,}348\, e^{-9{,}702t} - 0{,}079\, e^{-76t} + 0{,}016\, e^{-147t}$ $y_4 = 0$ $y_5 = -y_3 \quad y_6 = -y_2 \quad y_7 = -y_1$	$y_1\,(t = 0) = 0{,}857$ $y_2\,(t = 0) = 0{,}571$ $y_3\,(t = 0) = 0{,}285$

TABLEAU 6-7e

Solution avec 9 éléments ($n = 9$)

$$y_1 = 0{,}794\, e^{-9{,}76t} + 0{,}074\, e^{-81t} + 0{,}0177\, e^{-190t} + 0{,}0031\, e^{-286t}$$
$$y_2 = 0{,}697\, e^{-9{,}76t} + 0{,}0 \quad - 0{,}023\, e^{-190t} - 0{,}0084\, e^{-286t}$$
$$y_3 = 0{,}518\, e^{-9{,}76t} - 0{,}074\, e^{-81t} - 0{,}009\, e^{-190t} + 0{,}009\, e^{-286t}$$
$$y_4 = 0{,}276\, e^{-9{,}76t} - 0{,}074\, e^{-81t} + 0{,}026\, e^{-190t} - 0{,}0062\, e^{-286t}$$
$$y_5 = 0$$
$$y_6 = -y_4 \quad y_7 = -y_3 \quad y_8 = -y_2 \quad y_9 = -y_1$$

$y_1\,(t = 0) = 0{,}888$
$y_2\,(t = 0) = 0{,}666$
$y_3\,(t = 0) = 0{,}444$
$y_4\,(t = 0) = 0{,}222$

8. — Nombre infini d'éléments

Sans chercher ailleurs la solution pour une nombre infini d'éléments, la théorie précédente nous permet de retrouver des résultats connus, et très rapidement. En effet, il est facile de voir que l'équation (6-5a) établie pour 5 éléments à partir de (6-1f), (6-2a) et (6-2e) devient pour un nombre infini d'éléments :

$$\begin{aligned} z'_2 &= -2gz_2 + gz_3 \\ z'_3 &= -2gz_3 + gz_2 + gz_4 \\ z'_4 &= -2gz_4 + gz_3 + gz_5 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z'_{n-1} &= -2gz_{n-1} + gz_{n-2} + gz_n \\ z'_n &= -gz_n + gz_{n-1} \end{aligned} \qquad (6\text{-}8a)$$

La somme des premiers termes donne la somme des dérivées des dénivellations ou encore la dérivée de leur somme, c'est-à-dire $\frac{dy}{dt}$. Si on effectue à partir du début on a pour y le niveau du premier élément, si on effectue à partir d'un rang p on a pour y le niveau du p^{me} élément, p peut varier de 2 à n et l'on peut donc avoir la valeur de $\frac{dy}{dt}$ quel que soit y ; ce qui reste vrai quand n devient infini (solution exacte du problème de la chaleur).

Or, si l'on effectue la somme à partir du rang p on trouve :

$$\begin{aligned} z'_p &= -2gz_p + gz_{p-1} + gz_{p+1} \\ z'_{p+1} &= -2gz_{p+1} + gz_p + gz_{p+2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z'_{n-1} &= -2gz_{n-1} + gz_{n-2} + gz_n \\ z'_n &= -gz_n + gz_{n-1} \end{aligned} \qquad (6\text{-}8b)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = g(z_{p-1} - z_p) = -g(z_p - z_{p-1})$$

or :

$$g = \frac{1}{\rho c}\,;\ \frac{1}{\rho} = \frac{K\sigma}{dx} \text{ et } c = C_l dx$$

donc :

$$g = \frac{H}{dx^2} \qquad (6\text{-}8c)$$

d'autre part

$$-z_p = \left(\frac{dy_p}{dx}\right) dx$$

$$-z_{p-1} = \left(\frac{dy_{p-1}}{dx}\right) dx$$

on a donc :

$$\frac{\partial y_p}{\partial t} = \mathrm{H} \frac{\dfrac{dy_p}{dx} - \dfrac{dy_{p-1}}{dx}}{dx} = \mathrm{H} \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad (6\text{-}8c)$$

on retrouve l'équation fondamentale bien connue :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}\sigma}{c} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}8d)$$

voir (4-4e).

Mais si on effectue la somme à partir du premier terme on trouve seulement :

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = -gz_2 = -\frac{\mathrm{H}}{dx} \frac{dy}{dx} \qquad (6\text{-}8e)$$

Pour que cette relation soit vérifiée il est nécessaire, si $\dfrac{\partial y}{\partial t}$ n'est pas infini, et il ne peut pas *physiquement* l'être, que $\dfrac{dy}{dx} = 0$, quel que soit le temps.

Or nous avons vu que la solution $y = f(t)$ peut être mise sous la forme d'une somme infinie de termes exponentiels.

De même, par conséquent, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Dire que cette dernière somme est nulle pour t quelconque et $x = 0$, c'est-à-dire que cette somme est une somme de sinus de la forme :

$$\sum \frac{\mathrm{A}}{m} e^{-\omega t} \sin mx. \qquad (6\text{-}8f)$$

C'est-à-dire que y est de la forme

$$\sum \mathrm{A} e^{-\omega t} \cos mx \qquad (6\text{-}8g)$$

Mais la relation (6-8d) permet de préciser cette dernière forme pour chaque élément particulier de la solution générale.

En effet, en dérivant par rapport au temps et par rapport à x et en appliquant la relation (6-8d) on trouve :

$$\omega = \frac{\mathrm{K}\sigma m^2}{c} \qquad (6\text{-}8h)$$

Enfin, la condition que, à n'importe quel temps, y s'annule pour l'élément-milieu du système complet, c'est-à-dire que, à n'importe quel temps, $\theta = 0$ pour le milieu du mur, exige que les cos mx s'annullent pour $x = \frac{l_1}{2}$ si l'épaisseur du mur est l_1, ou si la longueur correspondante dans le système hydrodynamique est aussi l_1 (*somme des longueurs nominales des tubes capillaires*) ; donc :

$$m \frac{l_1}{2} = (2p - 1) \frac{\pi}{2},$$

p variant de 1 à l'infini, soit :

$$m = \frac{(2p - 1)\,\pi}{l_1} \tag{6-8i}$$

En définitive :

$$y = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \left[e^{-\frac{K\sigma}{c} \frac{(2p-1)^2 \pi^2}{l_1^2} t} \times \cos\left(\frac{(2p - 1)\,\pi}{l_1} x \right) \right] \tag{6-8j}$$

Cette démonstration est vraie quel que soit le mur envisagé, homogène ou non, pourvu qu'il soit isolé de l'extérieur et que sa température médiane reste constante, il est facile de s'en rendre compte en faisant varier g c'est-à-dire en affectant chaque élément p d'une valeur g_p. Elle est vraie quelle que soit la forme initiale de la courbe de température. C'est cette dernière qui détermine les valeurs de A restées encore sans signification pour nous.

En effet pour $t = 0$ (6-8j) devient :

$$y\,(t = 0) = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p \cos \frac{(2p - 1)\,\pi}{l_1} x \tag{6-8k}$$

Ici, on a une chute linéaire de niveau entre les ordonnées y_0 et 0 pour les abscisses 0 et $\frac{l_1}{2}$. En appliquant les formules connues pour ces représentations par une série de Fourier [5] et tous calculs faits, on trouve :

$$y\,(t = 0) = \frac{8 y_0}{\pi^2} \times$$

$$\times \left(\cos \frac{\pi}{l_1} x + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi}{l_1} x + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi}{l_1} x + \right. \tag{6-8l}$$

$$\left. + \ldots\ldots + \frac{1}{(2p - 1)^2} \cos \frac{(2p - 1)\,\pi}{l_1} x + \ldots \right)$$

(5) Ingersol I, p. 49 sq., etc...

Ce qui donne la solution finale :

$$y = \frac{8y_0}{\pi^2}\left(e^{-\frac{K\sigma\pi^2}{c_1 l_1^2}t} \cos\frac{\pi}{l_1}x + \frac{1}{9}\, e^{-\frac{K\sigma}{c}\frac{9\pi^2}{l_1^2}t} \cos\frac{3\pi}{l_1}x + \ldots. \right) \tag{6-8m}$$

ou encore :

$$\frac{y}{y_0} = \frac{8}{\pi^2}\left(e^{-\frac{K\sigma\pi^2}{c_1 l_1^2}t} \cos\frac{\pi}{l_1}x + \frac{1}{9}\, e^{-\frac{K\sigma}{c}\frac{9\pi^2}{l_1^2}t} \cos\frac{3\pi}{l_1}x + \ldots. \right) \tag{68-n}$$

d'après ce que nous avons vu au N° 6 de ce chapitre, la quantité $\frac{K\sigma}{c_1 l_1^2}$ est assimilable à g. Dans le cas où l'on fait $g = 1$, ainsi que $y_0 = 1$, ce qui a eu lieu pour tous les calculs précédents on a l'équation :

$$\begin{aligned} y = 0{,}810569 \times \Bigg[& e^{-9{,}8696\,t} \cos\left(\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + \frac{1}{9}\, e^{-88{,}8264\,t} \cos\left(3\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + \frac{1}{25}\, e^{-246{,}74\,t} \cos\left(5\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + \frac{1}{49}\, e^{-483{,}61\,t} \cos\left(7\pi\frac{x}{l_1}\right) \ldots \Bigg] \end{aligned} \tag{6-8p}$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante, en séparant les divers coefficients :

$$\begin{aligned} y = \quad & 0{,}8105 \; e^{-9{,}869\,t} \cos\left(\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + 0{,}09006 \; e^{-88{,}82\,t} \cos\left(3\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + 0{,}03242 \; e^{-246{,}74\,t} \cos\left(5\pi\frac{x}{l_1}\right) \\ & + 0{,}01654 \; e^{-483{,}61\,t} \cos\left(7\pi\frac{x}{l_1}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{6-8q}$$

Nous pouvons dès lors comparer les résultats.

9. — Comparaison des résultats

Déjà, sans doute, le lecteur se sera aperçu de l'unité d'expression qui se manifeste dans les résultats. Nous allons, pour ne pas nous étendre trop, nous borner à l'expression du premier terme y_1; l'extension aux autres termes peut se faire de façon absolument similaire.

Les tableaux précédents et l'équation (6-8q) nous permettent d'écrire les résultats comparatifs ci-dessous.

Tableau 6-9a

Nombre d'éléments n	Valeur du niveau y_1 dans le 1er élément
2	$y_1 = 0{,}500\, e^{-8t}$
3	$y_1 = 0{,}666\, e^{-9t}$
5	$y_1 = 0{,}757\, e^{-9{,}55t} + 0{,}04223\, e^{-65t}$
7	$y_1 = 0{,}784\, e^{-9{,}702t} + 0{,}063\, e^{-76t} + 0{,}009\, e^{-147t}$
9	$y_1 = 0{,}794\, e^{-9{,}76t} + 0{,}074\, e^{-81t} + 0{,}0177\, e^{-190t} + 0{,}0031\, e^{-286t}$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
∞	$y_1 = 0{,}8105\, e^{-9{,}869t} + 0{,}09006\, e^{-88{,}82t} + 0{,}0324\, e^{-246{,}74t} + 0{,}01654\, e^{-483t} + \ldots$

Il saute aux yeux que la solution exacte du problème de la chaleur (nombre infini d'éléments) n'est autre que la limite de l'analogie hydraulique (nombre fini d'éléments). En particulier, à mesure qu'on ajoute 2 éléments, il s'ajoute un terme à l'expression de y_1 qui reste constamment de la même forme.

D'autre part, les termes de rang supérieur *tendent très vite vers zéro,* soit par le fait du *coefficient,* soit par le fait de *l'exponentielle.*

Ainsi, pour $t = 0{,}1$, $e^{-9t} = 0{,}406$, mais l'exponentielle du terme suivant dans le cas le plus favorable (exposant égal à $-65t$) vaut $e^{-65t} = 0{,}0015$, et le coefficient en est inférieur à 0,1.

Si nous nous bornons à l'analyse du premier terme, on voit que soit l'exposant de e, soit le coefficient de e, croissant à mesure

que n croit, tendent *asymptotiquement* vers la valeur qu'ont leurs homologues dans le développement infini pour $n = \infty$.

Nous avons pour l'exposant les valeurs suivantes :

n	$\frac{-\text{exposant}}{t}$
2	8
3	9
5	9,55
7	9,702
9	9,76
∞	$9{,}869 = \pi^2$

TABLEAU (6-9b)

Ce qui est illustré par la courbe (6-9a).

De même, si nous comparons les coefficients du premier terme, nous trouvons les valeurs suivantes :

n	Coefficient
2	0,5
3	0,666
5	0,757
7	0,784
9	0,794
∞	0,8105

TABLEAU (6-9c)

La courbe obtenue (6-9b) est semblable à la précédente.

On voit en même temps avec quel excellent degré d'approximation on peut résoudre le problème au moyen de 4 éléments hydrauliques seulement, puisque pour $n = 9$ il suffit de monter 4 tubes verticaux $T_1\ T_2\ T_3\ T_4$ (voir même chapitre, paragraphe n° 5).

Cette grande approximation sera encore plus évidente si nous calculons les valeurs de y pour *les mêmes abscisses* dans l'équation pour $n = 9$ et dans celle pour $n = \infty$. En effet si les termes y_1 tendent vers une limite, nous devons remarquer qu'ils correspondent

FIGURE (6 - 9a)

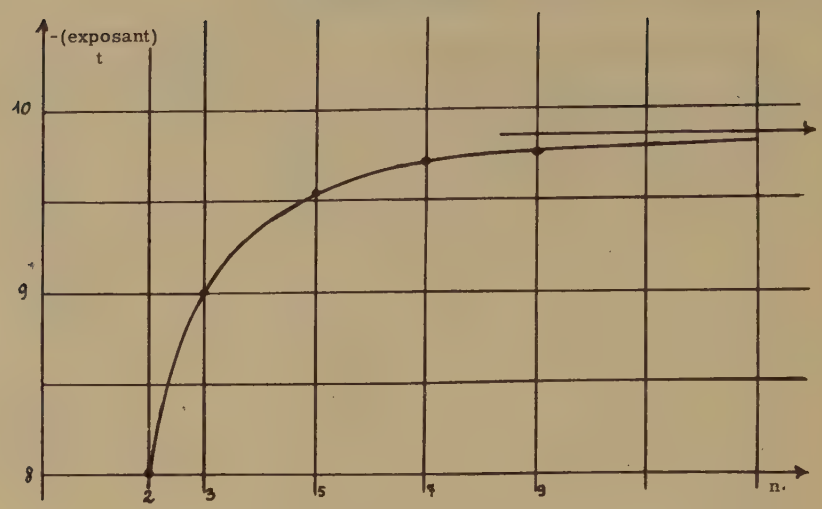
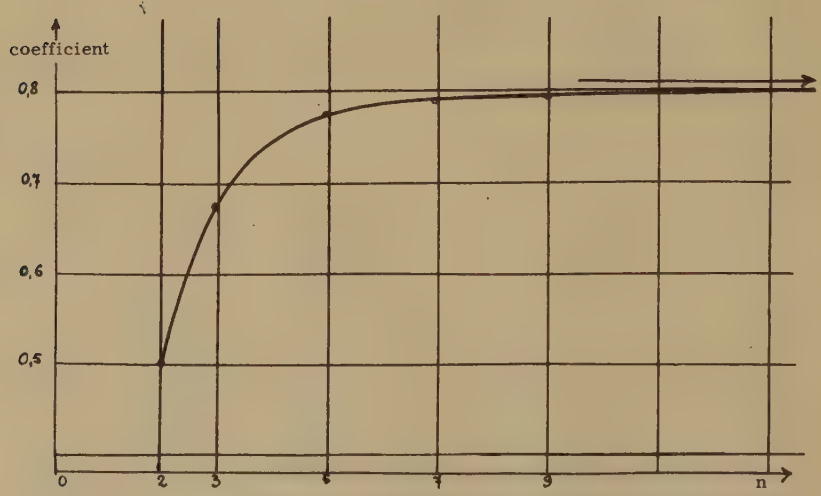


FIGURE (6 - 9b)



à des abscisses *différentes* tendant vers zéro lorsque n croit (voir le même chapitre, n° 6).

Si nous voulons exprimer l'équation (6-8p) pour l'abscisse qui correspond à y_1 pour $n = 9$, soit pour $x = \frac{l_1}{18}$ nous trouvons :

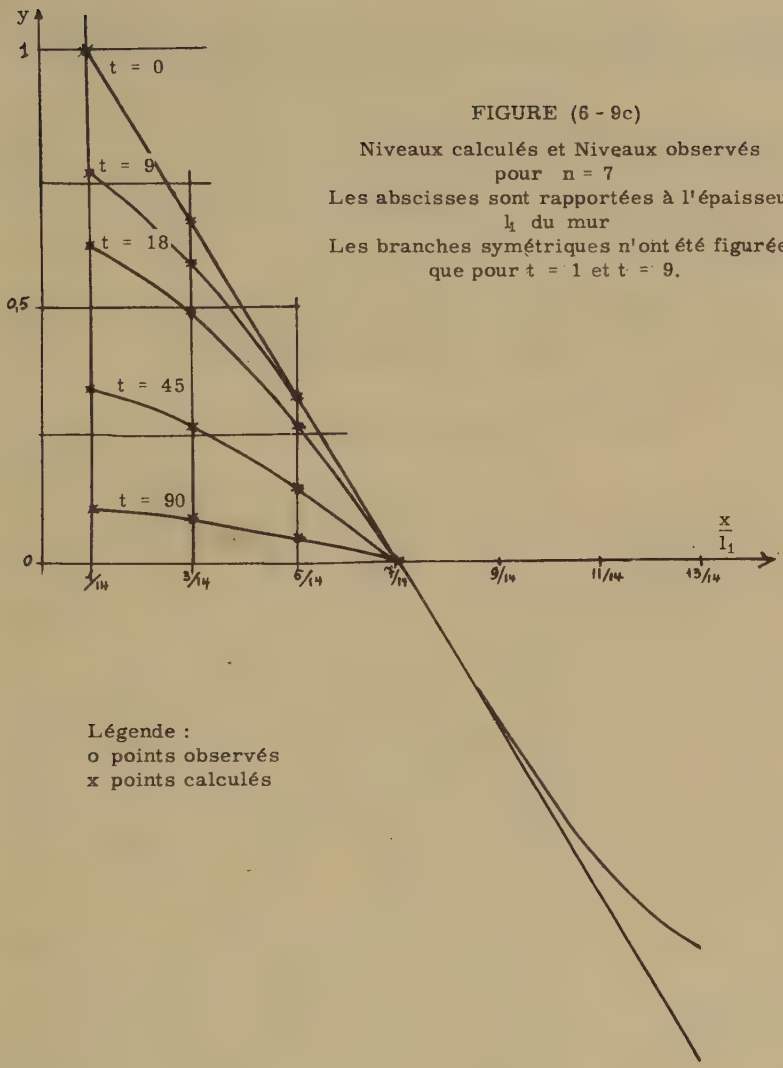


FIGURE (6 - 9c)

Niveaux calculés et Niveaux observés
pour n = 7
Les abscisses sont rapportées à l'épaisseur
l_1 du mur
Les branches symétriques n'ont été figurées
que pour t = 1 et t = 9.

Légende :
o points observés
x points calculés

$$y = 0{,}810569\, e^{-9{,}8696\, t} \cos\frac{\pi}{18} + \frac{0{,}810569}{9} e^{-88{,}826\, t} \cos\frac{3\pi}{18} + \ldots\ldots$$

$$= 0{,}810569\, e^{-9{,}8696\, t} \cos 10^\circ + \frac{0{,}810569}{9} e^{-88{,}826\, t} \cos 30^\circ +$$

$$+ \frac{0{,}810569}{25} e^{-246\, t} \cos 50^\circ \ldots$$

$$= 0{,}798\, e^{-9{,}869\, t} + 0{,}078\, e^{-88{,}826\, t} + 0{,}020\, e^{-246\, t} \ldots\ldots \qquad (6\text{-}9a)$$

Si maintenant nous comparons cette valeur de y avec celle qui nous est donnée pour y_1 dans l'appareillage à $n = 9$ on trouve :

Pour $n = 9$

$$y_1 = 0{,}794\, e^{-0{,}784\,t} + 0{,}074\, e^{-83{,}1\,t} + 0{,}0177\, e^{-330\,t}$$

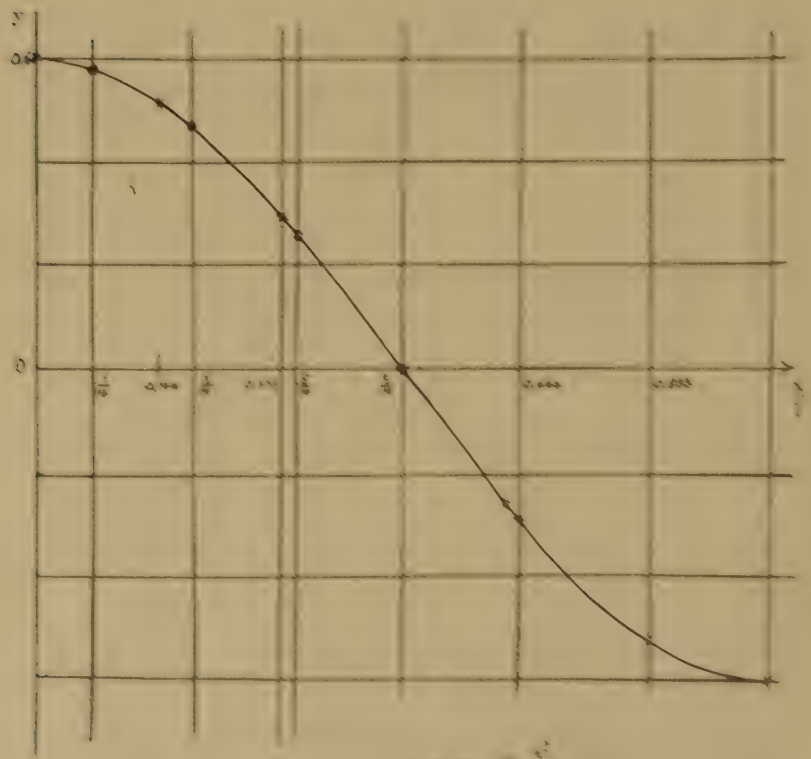
Pour $n = \infty$

$$y_1 = 0{,}798\, e^{-0{,}814\,t} + 0{,}078\, e^{-88{,}81\,t} + 0{,}020\, e^{-443\,t}$$

en remarquant que le 3e terme est tout de suite insignifiant, la concordance est on ne peut plus satisfaisante.

Il est inutile d'ajouter que les résultats du calcul par éléments en nombre fini et ceux de l'expérience sont absolument concordants.

FIGURE (6 - 9 d)



Concordance de la courbe $y = \frac{8}{\pi^2}\left[e^{-\frac{\pi^2}{4}t}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \ldots\right]$

et des résultats expérimentaux pour $n = 7$.

* points calculés pour $t = 0,1$

o points observés

La figure (6-9c) montre les courbes des niveaux relatifs à une expérience avec 3 éléments ($n = 7$).

De même la courbe de la figure (6-9d) montre que pour $n = 7$, c'est-à-dire avec trois éléments seulement la concordance du calcul obtenu par la formule (6-8p) avec l'observation est déjà de l'ordre de la précision des courbes habituelles.

10. — Passage des équations hydrodynamiques aux équations de la chaleur

Ce passage est très facile d'après ce que nous savons des correspondances.

Par exemple l'équation (6-8m) :

$$y = \frac{8y_0}{\pi^2}\left[e^{-\frac{K\sigma\pi^2}{c_1 l_1^2}t} \cos\left(\pi\frac{x}{l_1}\right) + \frac{1}{9} e^{-\frac{K\sigma}{c_1}\frac{9\pi^2}{l_1^2}} \cos\left(\frac{3\pi x}{l_1}\right)\ldots\right]$$

devient avec les notations du CH 3 :

$$y = \frac{8y_0}{\pi^2}\left[e^{-H\frac{\pi^2}{l_1^2}t} \cos\left(\pi\frac{x}{l_1}\right) + \frac{1}{9} e^{-H\frac{9\pi^2}{l_1^2}t} \cos\left(3\pi\frac{x}{l_1}\right)\ldots\right]$$

où H est la diffusivité hydrodynamique.

Pour transformer en équation de la chaleur il suffit de remarquer que :

$$H \varnothing h$$
$$y \varnothing \theta$$

d'où :

$$\theta = \frac{8\theta_0}{\pi^2}\left[e^{-\frac{\pi^2}{l_1^2}ht} \cos\left(\frac{\pi x}{l_1}\right) + \frac{1}{9} e^{-\frac{9\pi^2}{l_1^2}ht} \left(3\frac{\pi x}{l_1}\right) + \ldots\right] \quad (6\text{-}10b)$$

Quant à l'utilisation des courbes données par les calculs pour $h = 1$ et $l_1 = 1$, pour tout autre cas où $h \neq 1$ et $l_1 \neq 1$, il suffit d'appliquer ce que nous avons dit au chapitre 4, n° 4 relativement à l'utilisation des courbes.

Dans le cas où les deux faces du mur, au lieu d'être primivement à $+\theta_0$ et $-\theta_0$ seraient à θ_0 et θ_1 l'équation (6-10b) deviendrait :

$$\theta = \frac{4(\theta_0 - \theta_1)}{\pi^2}\left(e^{-\frac{\pi^2}{l^2}ht} \cos\pi\frac{x}{l_1} + \ldots\right) + \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} \quad (6\text{-}10c)$$

11. — Moyens auxiliaires de calcul pour les cœfficients des exponentielles dans la résolution des systèmes linéaires

Pour nos calculs, nous n'avons pas toujours suivi la marche que nous avons indiquée au n° 5 du présent chapitre.

Par exemple, soit :

$$\begin{aligned} z'_2 &= -2g\ z_2 + g\ z_3 \\ z'_3 &= -2g\ z_3 + g\ z_2 + g\ z_4 \\ z'_4 &= -2g\ z_4 + g\ z_3 + g\ z_5 \\ z'_5 &= -\ g\ z_5 + g\ z_4 \end{aligned} \qquad (6\text{-}11a)$$

quand on a calculé tous les ω de la solution générale :

$$z = \Sigma\, \lambda\, e^{-\omega t} \qquad (6\text{-}11b)$$

ce qui se fait comme nous l'avons vu par la résolution d'une équation du $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ ième degré, on peut procéder ainsi pour le cul des coefficients λ :

1° Au lieu de chercher une solution exponentielle, on cherche une solution polynomale :

$$\begin{aligned} z_2 &= a_0 + a_1\ t + a_2\ t^2 \ldots \\ z_3 &= b_0 + b_1\ t + b_2\ t^2 \ldots \\ z_4 &= c_0 + c_1\ t + c_2\ t^2 \ldots \end{aligned} \qquad (6\text{-}11c)$$

2° Il est très facile de trouver la valeur des cœfficients a, b, c, etc... :

— a_0, b_0, c_0, ... sont les valeurs des z pour $t = 0$; ils sont un *donné préalable.*

— en portant z_2, z_3, z_4 ..., sous la forme ci-dessus exprimée, dans le système (6-11a) on trouve facilement :

$$\begin{aligned} &(a_1 + 2ga_0 - gb_0) + (2a_2 + 2ga_1 - gb_1)\ t + (3a_3 - 2ga_2 - gb_2)\ t^2 + \ldots = 0 \\ &(b_1 + 2gb_0 - ga_0 - gc_0) + (2b_2 + 2gb_1 - ga_1 - gc_1)\ t + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (6\text{-}11d)$$

Pour que ce système se vérifie il faut que les cœfficients soient nuls identiquement, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a_1 &= -2ga_0 + gb_0 \\ b_1 &= -2gb_0 + ga_0 + gc_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

puis, avec les termes de degré 1 en t :

$$a_2 = \frac{-ga_1 + gb_1}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et ainsi de suite, ce qui donne directement les valeurs de : a_0, b_0 ... a_1, b_1 ... a_2, b_2 ..., etc...

3° On a ainsi *une forme* développée des z. On peut en avoir *une autre* en développant les exponentielles de (6-11b) ce qui donne :

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda(2,1)\, e^{-\omega_1 t} + \lambda(2,2)\, e^{-\omega_2 t} + \lambda(2,3)\, e^{-\omega_3 t} + \lambda(2,4)\, e^{-\omega_4 t} = \\ &= [\lambda(2,1) + \lambda(2,2) + \lambda(2,3) + \lambda(2,4)] - \\ &- [\omega_1\lambda(2,1) + \omega_2\lambda(2,2) + \omega_3\lambda(2,3) + \omega_4\lambda(2,4)]\, t + \\ &+ \left(\frac{\omega_1^2}{2!}\lambda(2,1) + \frac{\omega_2^2}{2!}\lambda(2,2) + \frac{\omega_3^2}{2!}\lambda(2,3) + \frac{\omega_4^2}{2!}\lambda(2,4)\right) \\ &\equiv a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \ldots \end{aligned} \qquad (6\text{-}11e)$$

ce qui donne pour les λ un système linéaire d'équations :

$$\begin{aligned} &\lambda(2,1) + \lambda(2,2) + \lambda(2,3) + \lambda(2,4) = a_0 \\ &\frac{\omega_1}{1}\lambda(2,1) + \frac{\omega_2}{1}\lambda(2,2) + \frac{\omega_3}{1}\lambda(2,3) + \frac{\omega_4}{1}\lambda(2,4) = -a_1 \\ &\frac{\omega_1^2}{2!}\lambda(2,1) + \frac{\omega_2^2}{2!}\lambda(2,2) + \frac{\omega_3^2}{2!}\lambda(2,3) + \frac{\omega_4^2}{2!}\lambda(2,4) = +a_2 \\ &\frac{\omega_1^3}{3!}\lambda(2,1) + \frac{\omega_2^3}{3!}\lambda(2,2) + \frac{\omega_3^3}{3!}\lambda(2,3) + \frac{\omega_4^3}{3!}\lambda(2,4) = -a_3 \end{aligned} \qquad (6\text{-}11f)$$

qu'il est très facile de résoudre.

Nous n'insistons pas davantage sur le sujet. Les méthodes de résolution des équations telles que celles que nous avons trouvées sont connues. Nous nous sommes borné à indiquer qu'il y a des moyens de calcul divers, à employer suivant l'opportunité.

12. — Conclusions

Nous n'avons pas hésité à écrire ce chapitre un peu aride pour montrer qu'en somme la méthode hydrodynamique est justifiée par le calcul. Avec un petit nombre d'éléments on réalise des expériences permettant d'obtenir facilement et à peu de frais des courbes valables, même dans des cas où l'analyse mathématique serait en défaut. Mieux : les analogies permettent de rendre visibles, évidentes, des formes de calcul assez abstraites, en montrant par exemple comment se forme une série de Fourier. Pour le physicien, elles deviennent donc une véritable méthode de calcul.

Il nous reste à montrer par un exemple comment les analogies hydrodynamiques peuvent aider à résoudre des problèmes extrêmement difficiles, inaccessibles à une autre analogie.

CHAPITRE VII

UN PROBLÈME DE CHANGEMENT D'ÉTAT : LE MUR DE GLACE

1. — Généralités

Les problèmes thermiques comportant un changement d'état sont extrêmement compliqués. En effet les équations ne sont plus homogènes du fait de l'introduction, à une température déterminée, d'une chaleur latente, ce qui crée l'existence de points singuliers dans l'expression mathématique.

Tel est le problème du « mur de glace » ; nous allons d'abord l'exposer, puis rapidement donner la solution classique, afin d'en montrer les difficultés, et enfin établir combien les analogies hydrodynamiques permettent une solution facile se prêtant à de nombreuses applications.

2. — Le problème du « Mur de glace » [1]

Un mur semi indéfini est formé par de la glace primitivement à une température $\theta_2 = a_2$ (fig. 7-2a).

Il est limité par un plan oy où il est en contact (à partir du temps $t = 0$ par exemple) avec un milieu à température constante a_1 supérieure à zéro.

Il en résulte une fusion de la glace, et une épaisseur croissante de glace fondue, qui est fonction du temps.

Les conditions limites sont :

— Pour une profondeur x *infinie* $\theta_2 = a_2$.

— Pour $x = f$ la température de l'eau θ_1 et la température de la glace θ_2 sont nulles toutes les deux (contact de la phase eau et de la phase glace à zéro degré).

— Pour $x = 0$ la température de l'eau θ_1 vaut a_1.

(1) Voir à ce sujet Ingersol II, p. 190 et suivantes.

Connaissant la chaleur latente de fusion de l'eau L relative à l'unité de masse, ainsi que les autres constantes du problème, on se propose d'étudier la marche de l'échauffement.

Ce problème serait extrêmement compliqué à résoudre complètement; on se borne à rechercher la variation de *f*, épaisseur de glace fondue (ou d'eau obtenue, en tenant compte des densités respectives, qu'on suppose généralement égales) en fonction du temps [2].

On effectue les calculs sur un tube de flux de section unité.

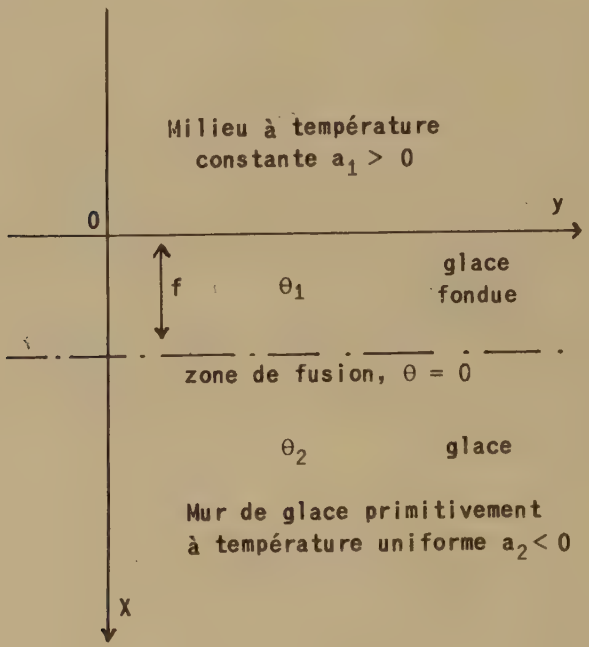


Figure (7-2a)

3. — Solution de Neumann

On a les conditions aux limites (fixées ci-dessus) :

$$\theta_2 (x = \infty) = a_2 \qquad (7\text{-}3a)$$

$$\theta_1 (x = 0) \ = a_1 \qquad (7\text{-}3b)$$

$$\theta_2 (x = f) \ = \theta_1 (x = f) = 0 \qquad (7\text{-}3c)$$

(2) Dans tous ces problèmes on suppose la convection négligeable, ce qui est souvent une approximation très grossière.

L'équation de la chaleur dans l'eau est :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = h_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad o < x < f \tag{7-3d}$$

Dans la glace on a :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = h_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad f < x \tag{7-3e}$$

Au point $x = f$ une épaisseur de glace df fond, ce qui correspond à une quantité de chaleur absorbée (par section unité de tube de flux) :

$$dQ = -\mathrm{L.d.df.} \tag{7-3f}$$

où d est le poids spécifique de l'eau qu'on peut prendre égal à 1 dans un système d'unités homogènes, d'où :

$$dQ = -\mathrm{L}\ df \tag{7-3g}$$

En écrivant que la différence des flux en deçà et en delà de la surface de séparation des phases correspond à la quantité de chaleur absorbée on a pour $x = f$:

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} = +\mathrm{L} \frac{df}{dt} \tag{7-3h}$$

L'intégration de cette équation différentielle est rendue extrêmement pénible à cause du 2e terme non homogène. Voici comment procède Neuman :

On cherchera des solutions particulières de (7-3d) et (7-3e) et on étudiera à quelles conditions elles satisfont (7-3h).

Or, des solutions particulières de (7-3d) ou (7-3e) sont bien connues, de la forme [3] :

$$\theta - \theta_i = (\theta_o - \theta_i) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{ht}}} e^{-u^2}\, du \tag{7-3i}$$

que l'on peut écrire :

$$\theta = \mathrm{B} + \mathrm{A}\, \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{ht}}\right) \tag{7-3j}$$

en posant :

$$\varphi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^z e^{-u^2}\, du\ ; \tag{7-3k}$$

(3) *Cf.* Ingersoll, p. 88. Nous écrivons l'équation sous la forme la plus générale, où la température de référence n'est pas forcément zéro.

Les constantes A et B seront à déterminer suivant les conditions aux limites. On peut donc poser :

$$\theta_1 = B_1 + A_1 \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{h_1 t}}\right) \tag{7-3l}$$

$$\theta_2 = B_2 + A_2 \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{h_2 t}}\right) \tag{7-3m}$$

l'équation aux limites (7-3c) entraîne que :

$$\varphi\left(\frac{f}{2\sqrt{h_1 t}}\right) \text{ et } \varphi\left(\frac{f}{2\sqrt{h_2 t}}\right)$$

et donc aussi :

$$\frac{f}{\sqrt{h_1 t}} \text{ et } \frac{f}{\sqrt{h_2 t}},$$

doivent être deux constantes, c'est-à-dire que :

$$f = b\sqrt{t} \tag{7-3n}$$

où b est une constante à déterminer. *La marche de la fusion est proportionnelle à la racine carrée du temps.*

D'autre part l'équation aux limites (7-3a) entraîne :

$$\theta_2(\infty) = B_2 + A_2 \varphi(\infty) = a_2$$

or :

$$\int_o^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ donc } \varphi(\infty) = 1$$

ce qui donne :

$$B_2 + A_2 = a_2 \tag{7-3p}$$

De même l'équation aux limites (7-3b) entraîne :

$$\theta_1(x = 0) = B_1 + A_1 \varphi(0) = a_1$$

or :

$$\varphi(0) = 0$$

d'où :

$$B_1 = a_1 \tag{7-3q}$$

En comparant (7-3n), (7-3m), (7-3l) et (7-3c) on obtient aussi :

$$B_2 + A_2 \varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right) = B_1 + A_1 \varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_1}}\right) = o \tag{7-3r}$$

où :

$$\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right) \text{ et } \varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_1}}\right)$$

sont deux constantes.

Finalement pour A_1, A_2, B_1 et B_2 on a les relations :

$$\begin{aligned} B_1 &= a_1 \\ B_1 + A_1 \varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_1}}\right) &= o \\ B_2 + A_2 &= a_2 \\ B_2 + A_2 \varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right) &= o \end{aligned} \qquad (7\text{-}3s)$$

ce qui donne finalement :

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{a_1}{\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_1}}\right)} = -\frac{a_1}{\varphi_1} \\ A_2 &= \frac{a_2}{1-\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right)} = \frac{a_2}{1-\varphi_2} \\ B_1 &= a_1 \\ B_2 &= \frac{a_2\,\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right)}{\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right)-1} = \frac{a_2\,\varphi_2}{\varphi_2 - 1} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3t)$$

ou, en portant ces valeurs dans (7-3l) et (7-3m) :

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= a_1 - \frac{a_1}{\varphi_1}\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{h_1 t}}\right) \\ \theta_2 &= \frac{a_2\,\varphi_2}{\varphi_2 - 1} + \frac{a_2}{1-\varphi_2}\varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{h_2 t}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3u)$$

ce qui donne en portant à leur tour ces valeurs dans l'équation fondamentale (7-3h) :

$$k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = L \frac{df}{dt}$$

$$-k_1 \frac{a_1}{\varphi_1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{h_1 t}}} e^{-u^2}\,du\right) - k_2 \frac{a_2}{1-\varphi_2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{h_2 t}}} e^{-u^2}\,du\right) = L \frac{\partial f}{\partial t}$$

ou, puisque $x = f$ (ce qui est la condition de (7-3h), et $f = b\sqrt{t}$,

$$\frac{k_1 a_1 e^{-\frac{b^2}{4h_1}}}{\sqrt{h_1}\cdot\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_1}}\right)} + \frac{k_2 a_2 e^{-\frac{b^2}{4h_2}}}{\sqrt{h_2}\cdot\left[1-\varphi\left(\frac{b}{2\sqrt{h_2}}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times L\cdot b \quad (7\text{-}3v)$$

On obtient ainsi une équation transcendante que l'on peut mettre sous la forme :

$$F(b) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} L\cdot b \quad (7\text{-}3w)$$

Cette équation, insoluble analytiquement, peut se résoudre graphiquement par l'intersection de la droite :

$$y = \frac{-\sqrt{\pi}}{2} L\, b \quad (7\text{-}3x)$$

et de la courbe représentant la fonction $y = F(b)$:

Pour le problème de la solidification on utilise le même calcul avec : $a_1 < 0$, $a_2 > 0$; Θ_1, h_1, k_1 sont représentatifs de la glace, et Θ_2, h_2, k_2 sont représentatifs de l'eau.

4. — Simplifications

On voit combien le problème est compliqué. La résolution de l'équation transcendentale (7-3v) donne b. Si l'on veut calculer la température d'un point quelconque au temps t, il faudra porter cette valeur dans l'expression d'une des deux équations (7-3u). Aussi a-t-on proposé plusieurs simplifications :

Soit en posant que la température de *l'eau* est partout à zéro (Solution de *Stéphan*) [4].

Soit en posant qu'on a une *plaque mince de glace* avec des gradients de température constants [5].

C'est cette difficulté qui a sans doute empêché de publier des courbes détaillées du mouvement de la chaleur dans le cas de la formation de glace, et d'aborder l'analyse des formes compliquées ou limitées à deux faces (mur fini) pour lesquelles le calcul est encore plus difficile.

(4) Ingersoll II, p. 194.
(5) Ingersoll II, p. 197.

5. — Analogie hydrodynamique du mur de glace fini. Principe.

Supposons un « mur de glace » fini $A_0\ A_n$ (figuré vertical pour plus de commodité) (Fig. 7-5 a) d'épaisseur x_1.

Nous allons le supposer divisé en éléments
$A_0\ A_1$, $A_1\ A_2$... $A_{p-1}A_p$,... $A_{n-1}\ A_n$.
Il sera donc figuré par n tubes verticaux $T_1\ T_2$... T_n, comme dans tous les problèmes précédents.

Mais il faut tenir compte de deux faits nouveaux :

1°) *Dans le problème thermique*, lorsque la température atteint le niveau correspondant à la formation de la glace, une quantité de chaleur proportionnelle à la masse du milieu intéressé est cédée (ou absorbée) par ce milieu.

Hydrodynamiquement nous traduirons : lorsque dans le tube T le niveau de l'eau atteint un niveau déterminé y_0, une quantité d'eau proportionnelle à la quantité de chaleur qu'elle représente est déversée dans le tube T (ou absorbée).

2°) *Thermiquement* lorsqu'on passe au-dessus ou au-dessous de cette température, les caractéristiques du milieu changent.

Hydrodynamiquement, cela signifie que la résistance des tubes capillaires et la section des éléments T doit changer lorsque l'on passe de part et d'autre du niveau y_0.

D'où :

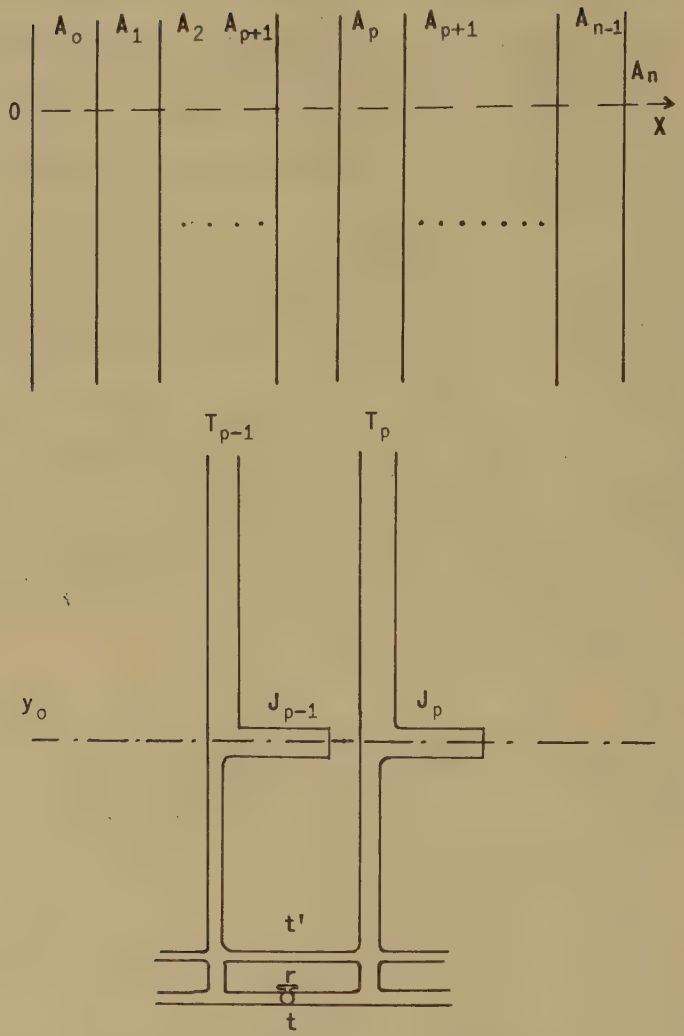
a) *Pour infuser (ou absorber) une quantité d'eau déterminée dans les tubes* T au niveau de y_0 nous avons simplement pourvu chaque tube T, à ce niveau, d'une dérivation horizontale J.

— qui se vide dans le cas d'une descente de l'eau (figurant un refroidissement) d'une quantité Q correspondant à la chaleur de fusion; pendant tout le temps de vidage le niveau reste constant, égal à y_0...

— et qui, dans le cas d'une montée de l'eau, se remplit de la même quantité, qu'elle absorbe en maintenant le niveau constant pendant ce remplissage.

b) *Pour figurer les capacités thermiques différentes* de la glace et de l'eau, il suffit d'avoir des tubes T de section différente au dessus et au dessou du niveau y_0.

c) *Pour figurer les résistances thermiques différentes* de la glace et de l'eau (la résistance de la glace est inférieure à celle de l'eau) le plus simple est d'imaginer entre chaque couple d'éléments T deux tubes capillaires au lieu d'un seul : un tube t, muni d'un robinet r, et un tube t' sans robinet — tels que la somme de leurs conductances corresponde à la conductance de la glace, et



... et sa représentation hydrodynamique.

Figure (7-5a).

(on n'a représenté que 2 éléments hydronamiques)

que la conductance du seul tube t' corresponde à celle de l'eau. En fermant le robinet r lorsque l'eau arrive au niveau y_0 dans le cas de la fusion (ou en l'ouvrant dans le cas de la solidification) on figure le changement de conductibilité thermique.

Mais ce dispositif facile à concevoir est d'un emploi difficile, tant à cause de l'attention constante et de l'habileté qu'il suppose, qu'à cause de l'erreur d'appréciation que l'on commet sur le moment où l'on doit manœuvrer le robinet.

D'autre part le profil des tubes T tel que nous l'avons représenté sur la figure (7-5 a) est difficile à obtenir et la lecture des niveaux n'y est pas facile.

Aussi avons-nous introduit à ce montage théorique des modifications pratiques qui rendent la construction plus facile — sinon théoriquement plus simple — et la maniabilité plus grande. Chemin faisant, l'exposé de ces modifications nous apporte des notions intéressantes sur les problèmes thermiques en général.

6. — Résistance variable en fonction de la température. Sa représentation sans modification des tubes capillaires

Supposons qu'à partir du tube T_p le niveau soit égal ou inférieur au niveau de congélation y_0. (Fig. 7-6 a).

Dire que de T_p à T_{p+1}, etc... la résistance des capillaires tp, $tp + 1$ etc... est devenue n fois plus forte, c'est dire que les débits sont devenus n fois plus petits. (n peut être inférieur à l'unité dans le cas d'une résistance décroissante).

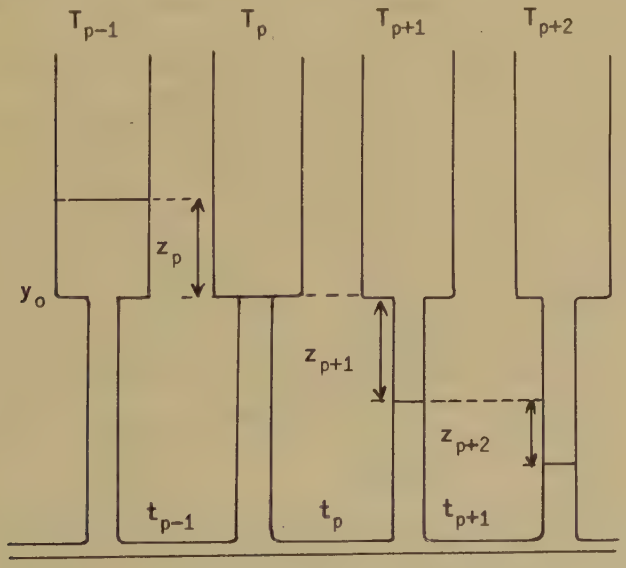


Figure (7-6 a).

La loi fondamentale

$$dq = \frac{K\sigma z}{l}\, dt \qquad (7\text{-}6a)$$

montre que l'on peut obtenir le même changement de débit en divisant les dénivellations z par n sans changer K. Cela revient *à diviser l'échelle des niveaux par n sans changer les tubes capillaires.*

Mais pour un appareillage ainsi conçu la loi du mouvement serait faussée dès la mise en marche, si l'on n'avait pas modifié la section des tubes T_p, car l'ascension de l'eau dans ces tubes, ou leur descente, resterait indentique à ce qu'elle *serait sans modification d'échelle.* Cette ascension (ou descente) devient n fois trop forte. Pour rétablir un mouvement correct, il faudra *multiplier la section des tubes T par n,* au-dessous de y_0 [6].

On voit donc qu'on peut représenter un changement de résistance par un changement d'échelle accompagné d'un changement de capacité hydrodynamique. Multiplier la résistance du milieu est équivalent à multiplier la capacité du milieu tout en divisant l'échelle des niveaux.

Avec ce subterfuge il est inutile de monter deux tubes capillaires par élément ; un seul suffit, et le robinet r de la figure (7-5 a) disparaît.

Le présent raisonnement est vrai pour un nombre quelconque d'éléments, donc un nombre infini, avec un nombre infini de modifications de la résistance hydraulique. *Il est également vrai pour les phénomènes thermiques dont il est l'image.*

Nous avons donc ainsi démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 7-6 *a.* — Le mouvement de la chaleur, dans un mur dont la conductivité thermique est une fonction de la température $\frac{k}{ko} = f(\theta)$, est identique à celui que se produit dans un mur dont la *conductivité est indépendante de la température* mais dont la *capacité calorifique* par unité de volume (chaleur spécifique rapportée au volume) devient fonction de la température suivant la loi $\gamma = \frac{\gamma_0}{f(\theta)}$, à condition de prendre une échelle de température $E = E_0 f(\theta)$.

(6) On peut dire en d'autres termes que l'*échelle des niveaux* étant divisée par n, pour le *même débit dq* l'eau va *n fois trop vite* dans les éléments verticaux.

Il faut donc *multiplier la section de ces tubes* par n, au-dessous de y_0, dans la *région où l'on a changé d'échelle* pour les niveaux.

Nous avons supposé jusqu'ici que par ailleurs la capacité restait constante; si la capacité est indépendamment une fonction de la température, soit $\gamma = g(\theta)$ on peut énoncer le théorème précédent sous une forme tout à fait générale :

THÉORÈME 7-6 *b*. — Dans un mur dont la conductivité thermique est une fonction de la température $k = k_0 f(\theta)$ et dont la chaleur spécifique est une autre fonction de la température $\gamma = g(\theta)$ le mouvement de la chaleur est identique au mouvement de la chaleur dans un mur dont la *conductivité est indépendante de la température* mais dont la *chaleur spécifique* est une fonction de la température, suivant la loi

$$\gamma = \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$$

à condition de prendre une échelle variable de températures

$$E = E_0 f(\theta)$$

RÉCIPROQUE. — Comme le raisonnement est absolument réversible on voit qu'on peut, toujours par un changement d'échelle dans la représentation des températures, remplacer un problème à chaleur spécifique fonction de la température par un problème à chaleur spécifique constante et à conductivité fonction de la température.

7. — Disposition pratique des tubes

Nous avons dit au N° 5 qu'obtenir des tubes T du profil voulu était dificile et que la lecture des niveaux se faisait mieux sur un tube vertical de section uniforme. Aussi avons nous utilisé des éléments complexes tels que les montrent la figure (7-7 *a*), où l'on peut modifier à volonté le calibre de chacun des éléments.

Un tube droit T est fixé à une potence P portant la graduation nécessaire pour l'évaluation des niveaux. Il est fixé à sa base sur un té de cuivre *u* qui le met en relation d'une part avec le tube capillaire de l'élément précédent, d'autre part avec un té en verre *w*; ce dernier établit la communication entre *u* et le tube capillaire *t* de l'élément, ainsi qu'avec un ensemble V formé de 3 parties unies par un té de cuivre *u'* : deux tubes verticaux *v* et *v'* de section différente, et un tube *h* horizontal destiné à emmagasiner l'eau représentant la chaleur latente de fusion.

Les tubes *v*, *v'* et *h* étaient soigneusement ajustés dans le tube *u'* de façon à bien définir les volumes (fig. 7-7 b).

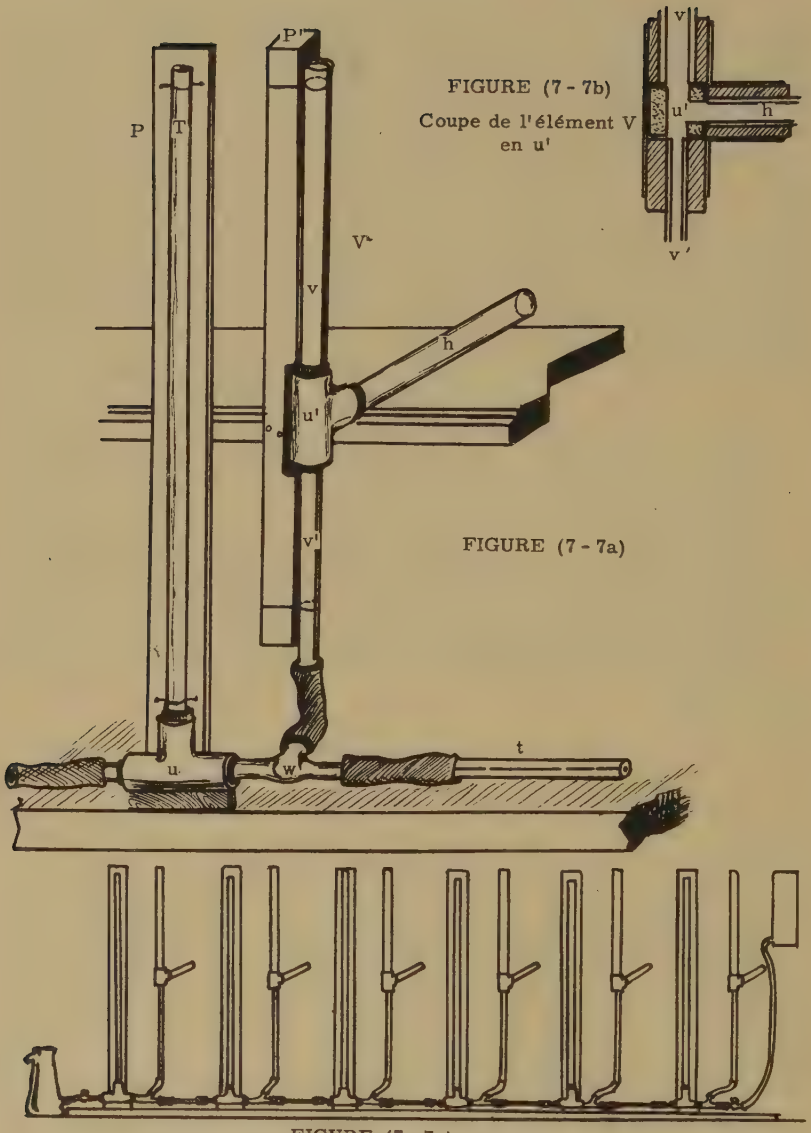


FIGURE (7 - 7b)
Coupe de l'élément V en u'

FIGURE (7 - 7a)

FIGURE (7 - 7c)

Il est clair qu'un tel élément est identique aux éléments T de la figure (7-5 a) à condition de prendre :

— *pour section* correspondant à la capacité calorifique de *l'eau liquide* la somme des sections de T et de *v*.

— *pour section* correspondant *à la glace* (modifiée suivant le théorème précédent) la somme des sections de T et de *v'*.

Les tubes horizontaux h étaient appuyés sur une planche exactement horizontale, les tubes r et v' attachés à une potence P′ solidaire de cette planche.

L'ensemble est figuré par la figure (7-7 c) où l'on peut distinguer en outre un réservoir à niveau constant supérieur sur la droite et un réservoir à niveau constant inférieur sur la gauche.

8. — Calcul des sections. Dimensions adoptées

Pour établir l'appareillage nous avons pris les valeurs moyennes suivantes :

Conductivités [7] ..... — eau ..... 138. 10^{-5} cgs.
— glace ..... 500. 10^{-5} cgs.

Chaleurs spécifiques [8] par unité de volume :
— eau ..... 1 cgs.
— glace ..... 0,5 cgs.

Chaleur latente de fusion de l'eau [9] 79,7.

Dans ces conditions, si l'on appelle
S_1 la section du tube T
S_2 la section du tube v
S_3 la section du tube v'
d'après le théorème (7-6 b), ces sections respectives doivent être telles que

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_3} = \frac{\text{capacité thermique de l'eau}}{\text{capacité thermique de la glace}} \times \frac{\text{conduct. de la glace}}{\text{conduct. de l'eau}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_3} = \frac{1}{0{,}5} \times \frac{500}{138} = \frac{1}{0{,}138} \qquad (7\text{-}8a)$$

Nous avons choisi pour T un tube de 0,32 cm de diamètre
« v « 1,05 cm de diamètre
« v' « 0,25 cm de diamètre
ce qui vérifie sensiblement les proportions de (7-8 a).

Les tubes capillaires étaient de 10 cm de longueur et de l'ordre de 0,05 cm de diamètre intérieur. Une mesure de débit montre qu'avec l'eau employée, à la température des expériences on pouvait adopter pour K_0 la valeur 0.0304 ce qui est inférieur à la valeur

(7) Hodgman, pp. 2251-2252. Fabry, p. 210. Ingersol, p. 198, etc...
(8) Hodgman, p. 279, etc...
(9) Hodgman, p. 2130, etc...

calculée, et correspond à des tubes capillaires de 0,0334 cm de diamètre.

Enfin la longueur des tubes horizontaux h (figure 7-7 a) était de 51 cm, de l'extrémité close à l'affleurement dans le té u'.

9. — Dispositifs annexes

Comme nous l'avons vu, l'appareillage pouvait être mis en communication par une extrémité avec un bassin supérieur à niveau constant et par l'autre extrémité avec un bassin inférieur à niveau constant.

La communication avec ces bassins se faisait par l'intermédiaire d'un tube capillaire de 5 cm, correspondant à la résistance entre le milieu du premier élément du mur et la surface limite.

S'il y avait eu lieu de tenir compte d'une résistance de surface, il aurait suffi d'ajouter un tube capillaire supplémentaire de résistance correspondante.

Ajoutons que nous avions quelques appréhensions pour le vidage ou le remplissage des tubes horizontaux. Mais le mouvement de l'eau est très lent, et les opérations se sont déroulées de façon très satisfaisante. Il nous a suffi d'incliner très légèrement les tubes h — en leur donnant une pente de $\frac{1}{500}$ par exemple, ce qui ne modifiait pratiquement pas les conditions de l'expérience — pour que tout se passe parfaitement.

CHAPITRE VIII

LE MUR DE GLACE (Suite) : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

1. — Généralités

Nous avons traité avec le dispositif expliqué au chapitre précédent de nombreux problèmes relatifs au « mur de glace » : refroidissement, réchauffement, établissement d'un régime permanent à partir de la glace (par réchauffement) ou à partir de l'eau (par refroidissement) etc...

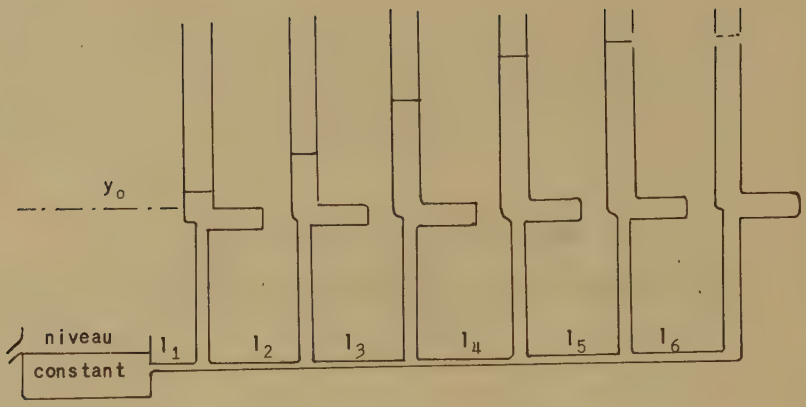
Nous nous bornerons dans ce chapitre à exposer les résultats relatifs à un de ces problèmes, en indiquant tout le parti qu'on peut tirer des courbes obtenues.

2. — Le cas traité et les résultats

Le problème que nous avons choisi, parce qu'il peut se comparer à ce qu'on sait dans le cas où il n'y a pas changement d'état [1] est celui d'un « *mur d'eau* » uniformément chauffé au temps zéro, *que l'on refroidit* en le plongeant au temps zéro dans un milieu à température inférieure à la température de congélation, en admettant que les deux faces prennent immédiatement cette température. On demande la loi du refroidissement, c'est à dire l'expression de θ en fonction de x et de t.

Comme on sait, il suffit de traiter le cas du *demi-mur,* obtenu en insérant dans ce mur en son plan médian une couche parfaitement isolante, ce qui ne change rien au problème. On obtient ainsi les courbes relatives à *la moitié* du mur et il suffit ensuite de cons-

(1) Voir par exemple Fabry, pp. 87-88, qui donne à la page 88 les courbes relatives au problème sans changement d'état.



(Figure 8-2 a)

truire les symétriques, pour avoir les courbes de la température dans toute l'épaisseur du mur.

Nous nous donnons donc *un demi-mur,* primitivement à une température θ_0 uniforme dans toute son épaisseur, isolé parfaitement à l'une de ses faces et mis en contact sur l'autre face, au temps zéro, avec une source de froid à température constante inférieure à la température de congélation. Nous supposerons ce demi-mur divisé en 6 éléments.

Hydrauliquement ce demi-mur sera figuré par un appareillage conforme à ce qui a été décrit au CH. 7, N°7. *Primitivement,* l'eau est à un niveau supérieur uniforme. *Au temps zéro* on met le premier élément en communication avec une source à niveau constant, inférieur au niveau y_0 figurant la température de congélation. Le dernier élément (il y en a 6 dans notre expérience) est isolé de l'extérieur. Les longueurs des tubes capillaires l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 et l_6 sont égales (10 cm) la longueur de l_1 ne vaut que la moitié (5 cm.) (voir CH. 7, N° 9).

Les résultats sont consignés dans le tableau 8-2 a. Les courbes de la figure 8-2 a illustrent ce tableau.

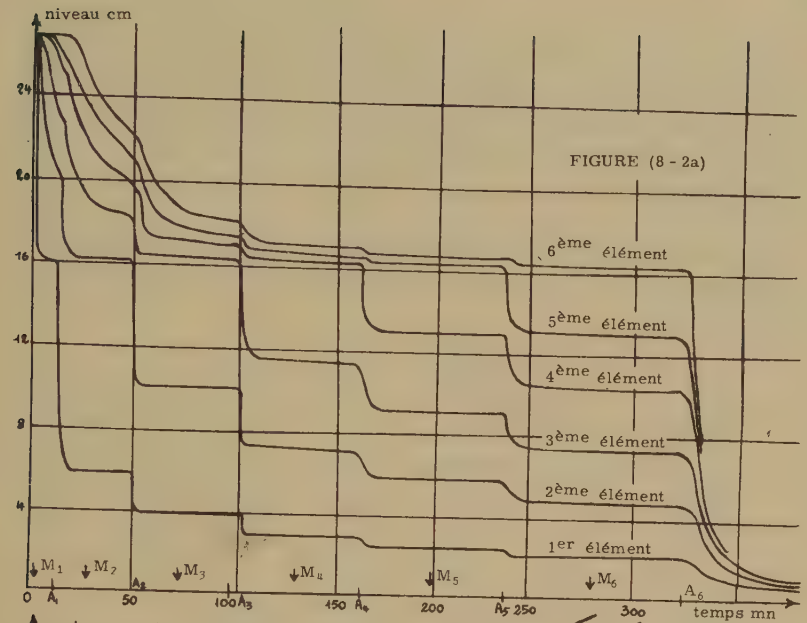
Ces courbes ont une allure tout à fait particulière, due aux circonstances de l'expérience. Elles présentent des paliers qui représentent les moments où, le tube horizontal d'un élément se vidant peu à peu, on a un état *quasi-stationnaire.* Lorsque le tube achève de se vider, un déséquilibre s'établit, la pente des courbes devient plus forte jusqu'à un nouvel état d'équilibre. *Les points*

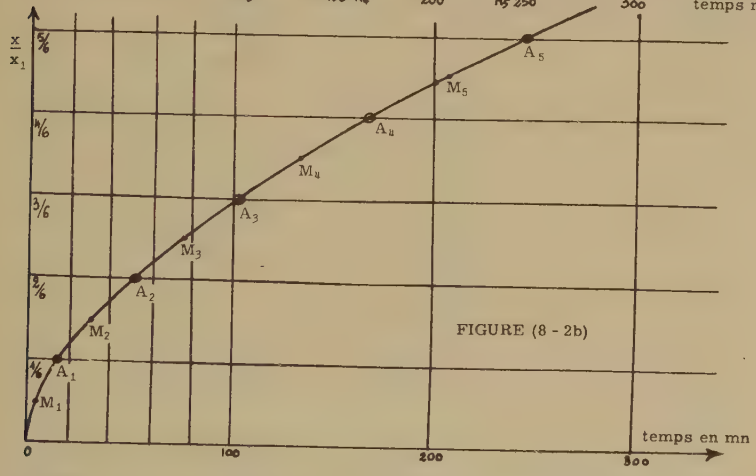
Tableau 8-2 a

Elément 1		Elément 2		Elément 3		Elément 4		Elément 5		Elément 6	
Temps minutes	Niveau cm	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	27	0	27	0	27	0	27	0	27	0	27
0,08	26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,23	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,36	24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,53	23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,66	22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,83	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1,41	18	1	26,6	1	27	-	-	-	-	-	-
2	16,5	2,5	24,7	2,5	26,8	2,5	27	-	-	-	-
-	-	3,5	23,6	4,5	26	4,5	26,9	4,5	27	-	-
4	16,1	4,33	23,0	7,5	25	7,5	26,6	7,6	26,9	-	-
-	-	6,83	22,0	-	-	-	-	-	-	-	-
10	15,9	10	20,6	10	23,8	10	25,9	10	26,5	10	27
12	15,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12,25	14	12,58	19,7	-	-	-	-	-	-	-	-
12,33	12,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12,5	10,3	13	19,0	13	22,9	13,5	25,2	13,5	26	-	-
14	7,8	14	18,0	-	-	-	-	-	-	-	-
15	7,2	15	16,8	15	22,0	15	24,7	15	25,7	-	-
17	6,0	17	16,5	18	20,8	18	23,9	18	25	18	27
20	5,9	20	16,3	20	20,2	20	23,4	20	24,9	20	26,5
26	5,9	26	16,3	26	19,1	26	21,85	26	23,5	26	25
40	5,9	40	16,3	40	18,5	40	20,5	40	21,9	40	23,2
48	5,8	48	16,0	48	18,0	48	19,9	48	21	48	22,3
-	-	48,42	15,9	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	48,75	15,8	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	48,83	15	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	48,96	14	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	49,16	13	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	49,5	12	49,5	17,5	50	19,5	50	20,7	50	22
50	4,3	50	11,2	50,5	16,9	51	19,4	51	20,7	-	-
51	4,0	51	10,6	51	16,8	52	18,8	52	20,1	52	21,4
52	3,85	52	10,15	52	16,4	90	17	90	17,4	90	18,3
90	3,8	90	10	90	16,2	105	16,4	105	16,8	105	17,6
105	2,9	105	7,25	105	12,6	107	16,4	107	16,7	107	17,5

Tableau 8-2.a (suite)

Elément 1		Elément 2		Elément 3		Elément 4		Elément 5		Elément 6	
Temps minutes	Niveau cm	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
110	2,85	110	7,2	107	11,8	110	16,35	110	16,6	110	17,4
-	-	-	-	110	11,55	-	-	-	-	-	-
145	2,8	145	7,05	145	11,3	145	16,2	145	16,5	145	16,95
-	-	-	-	-	-	162,16	15,4	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	162,9	14,5	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	163,25	14	-	-	-	-
164	2,65	164	6,5	164	10,1	164,5	13,5	164	16,4	-	-
166	2,5	165,5	6,2	165	9,7	166	13,2	165	16,4	165	16,8
180	2,35	180	5,75	180	9,1	180	12,9	180	16,3	180	16,7
215	2,35	215	5,65	215	9,05	215	12,9	215	16,2	215	16,6
-	-	-	-	-	-	-	-	227	16,2	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	230	16,2	-	-
233	2,35	233	5,65	233	9,05	233	12,9	233,9	15,5	-	-
-	-	-	-	-	-	234,4	12,1	234	15	-	-
-	-	-	-	-	-	234,8	11,9	234,4	14,5	-	-
235	2,30	235	5,5	235	8,7	236	11,4	235,5	13,9	236	16,6
238	2,1	238	5	238	7,85	238	10,9	238	13,45	238	16,5
242	2,05	242	4,8	242	7,5	242	10,5	242	13,15	242	16,5
252	2,0	252	4,7	252	7,35	252	10,4	252	13	252	16,4
275	2,0	275	4,65	275	7,30	275	10,3	275	12,9	275	16,3
320	2,0	320	4,6	320	7,25	320	10,25	320	12,85	320	16,2
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	325	16,15
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	326	15,5
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	326,17	15
-	-	-	-	-	-	327	9,8	327	11,65	326,3	14,5
-	-	328	4,4	327,75	6,9	327,5	9,5	328,5	10,2	326,58	14
328	1,9	329,5	4,2	329,5	6,25	329	8,5	329	9,5	327,25	13
-	-	-	-	-	-	-	-	330	9	328	12
330	1,8	331	3,8	330,5	5,8	330,5	7,5	330,5	8,65	329	11,1
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	330	10,25
333	1,5	333	3,2	333	4,8	333	6,2	333	7,1	333	8,2
346	0,9	346	1,6	346	2,2	346	2,65	346	2,9	346	3,7
366	0,65	366	0,9	366	-	366	1,15	366	1,25	366	1,8
390	0,6	390	0,75	390	0,9	390	0,9	390	0,9	390	1,4
∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5





de déséquilibre sont figurés en A_1, A_2... A_6 sur l'axe des abcisses (temps).

De ce fait les courbes *doivent être interprétées*. Voici comment nous avons procédé :

Quand le tube horizontal d'un élément achève de se vider, on peut considérer que la « congélation » (2) de l'élément est termi-

(2) Il est bien entendu que dans l'appareillage hydrodynamique il n'y a qu'une *figuration* de la congélation.

née. Les points A_1 A_2... etc. indiquent donc la fin de la « congélation » d'un élément (et le début de la suivante). En remarquant que la « congélation » du premier élément a commencé pour $t=0$, on peut faire la courbe de « congélation » qui représente la courbe de congélation véritable (abscisse du point où se produit la congélation en fonction du temps).

La figure (8-2 a) nous donne pour les points de congélation le tableau suivant, en prenant *pour épaisseur du demi-mur* $x_1 = 1$ (tableau 8-2 b).

Tableau 8-2 b

ABSCISSES ($x_1 = 1$)	TEMPS t	$\sqrt{t}$	DIFFERENCES des RACINES
0	0	0	3,6
1/6	13	3,6	3,5
2/6	50	7,1	3,05
3/6	103	10,15	2,65
4/6	164	12,8	2,6
5/6	236	15,4	2,6
6/6	326	18	

On voit que la courbe de congélation est à allure parabolique, surtout aux extrémités, mais avec une courbure plus accentuée au sommet. (Figure 8-2 b).

Cette courbe, déjà intéressante par elle-même, puisqu'en somme c'est ce que l'on recherche habituellement dans le cas de la glace, nous permet de déterminer le « point de congélation » du milieu de chaque élément; il suffit pour cela de mesurer l'ordonnée correspondant aux abscisses

$$\frac{1}{12}, \frac{3}{12} \text{ etc.}$$

On obtient ainsi le tableau (8-2 c).

Tableau 8-2 c

ABSCISSE pour $x_1 = 1$	TEMPS	$\sqrt{t}$	DIFFERENCES des RACINES
0	0	0	
			1,8
1/12	3,5	1,8	
			1,8
2/12	13	3,6	
			1,8
3/12	29	5,4	
			1,7
4/12	50	7,1	
			1,55
5/12	75	8,65	
			1,50
6/12	103	10,15	
			1,45
7/12	132	11,5	
			1,35
8/12	164	12,8	
			1,3
9/12	200	14,1	
			1,3
10/12	236	15,4	
			1,3
11/12	280	16,7	
			1,3
12/12	326	18	

On s'explique que jusqu'au temps 29 on ait une loi sensiblement parabolique par inspection de la courbe relative au 6° élément dans la figure (8-2 a). En effet dans ce dernier l'eau ne s'est mise en branle que vers le temps 18, et il est à présumer que s'il avait été suivi d'autres, dans le suivant l'eau ne se serait mise en branle que vers $t = 30$; cela quel que soit le nombre d'éléments à la suite.

On a donc jusqu'à ce moment la loi de refroidissement d'un

mur indéfini, et nous savons qu'alors la congélation suit la loi parabolique (équation 7-3 n).

Connaissant le temps de congélation des milieux de chaque élément du mur, nous déterminons *sur les courbes de la figure* (8-2 *a*) les points M_1 M_2... M_6 correspondant à ces temps, et nous *lisons*, pour la même abscisse, l'état de température des autres éléments, ce qui nous donne le tableau suivant (8-2 d).

Tableau 8-2 d

1° élément		2° élément		3° élément		4° élément		5° élément		6° élément	
t	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t	y
0	27	0	27	0	27	0	27	0	27	0	27
3,5	16,2	3,5	23,6	3,5	26,6	3,5	27	3,5	27	3,5	27
29	5,8	29	16,2	29	18,9	29	21,4	29	23,2	29	24,2
75	3,8	75	10,0	75	16,2	75	17,1	75	17,8	75	18,5
132	2,8	132	7,1	132	11,4	132	16,2	132	16,6	132	16,9
200	2,35	200	5,65	200	9,05	200	12,9	200	16,2	200	16,6
280	2	280	4,65	280	7,30	280	10,3	280	12,9	280	16,2
346	0,9	346	1,6	346	2,2	346	2,65	346	2,9	346	3,7
∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5	∞	0,5

Dans ce tableau, le niveau 16,2 représente la température de congélation, prise ordinairement pour zéro. En rapportant tous les niveaux à ce dernier on obtient le tableau (8-2 e).

Tableau 8-2 e

Temps	VALEUR DE y POUR LES ELEMENTS					
	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N°5	N°6
0	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8
3,5	0	+ 7,4	+10,4	+10,8	+10,8	+10,8
29	-10,4	0	+ 2,7	+ 5,2	+ 7	+ 8
75	-12,4	- 6,2	0	+ 0,9	+ 1,6	+ 2,3
132	-13,4	- 9,1	- 5	0	+ 0,4	+ 0,7
200	-13,85	-10,55	- 7,15	- 3,3	0	+ 0,4
280	-14,2	-11,55	- 8,90	- 5,9	- 3,3	0
346	-15,3	-14,6	-14,0	-13,55	-13,3	-12,5
∞	-15,7	-15,7	-15,7	-15,7	-15,7	-15,7

Tableau 8-2 f

Temps	VALEUR DE y POUR LES ELEMENTS					
	N° 1	N° 2	N° 3	N° 4	N° 5	N° 6
0	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8	+10,8
3,5	0	+ 7,4	+10,4	+10,8	+10,8	+10,8
29	- 2,87	0	+ 2,7	+ 5,2	+ 7	+ 8
75	- 3,42	- 1,71	0	+ 0,9	+ 1,6	+ 2,3
132	- 3,69	- 2,51	- 1,38	0	+ 0,4	+ 0,7
200	- 3,82	- 2,91	- 1,97	- 0,91	0	+ 0,4
280	- 3,92	- 3,18	- 2,46	- 1,63	- 0,91	0
346	- 4,22	- 4,03	- 3,86	- 3,74	- 3,67	- 3,45
∞	- 4,33	- 4,33	- 4,33	- 4,33	- 4,33	- 4,33

Pour obtenir la courbe définitive il reste à effectuer, en dessous de zéro, le changement d'échelle exposé au CH. VII N° 6. Le multiplicateur nous est donné par le rapport :

conductivité de la glace / conductivité de l'eau

soit 3,62. C'est à dire, que si l'échelle des températures au dessous de zéro est multipliée par 3,62, il nous faudra *diviser* les nombres *négatifs* du tableau (8-2 e) par 3,62 ce qui donne le tableau définitif (8-2 f).

Les résultats sont représentés par les 2 figures (8-2 c) et (8-2 d) donnant l'une les niveaux ou températures en fonction des abscisses pour des temps divers, l'autre les niveaux ou températures en fonction du temps pour des abscisses diverses.

Ainsi, par le travail de correction expliqué dans ce paragraphe nous retrouvons la courbe primitive (8-2 a) *corrigée* et représentant parfaitement le mouvement de la chaleur dans un « mur » d'eau se glaçant progressivement.

3. — Interprétation des courbes

Les courbes corrigées (8-2c) et (8-2d) parlent suffisamment par elles mêmes. On voit ici l'avantage des analogies sur les for-

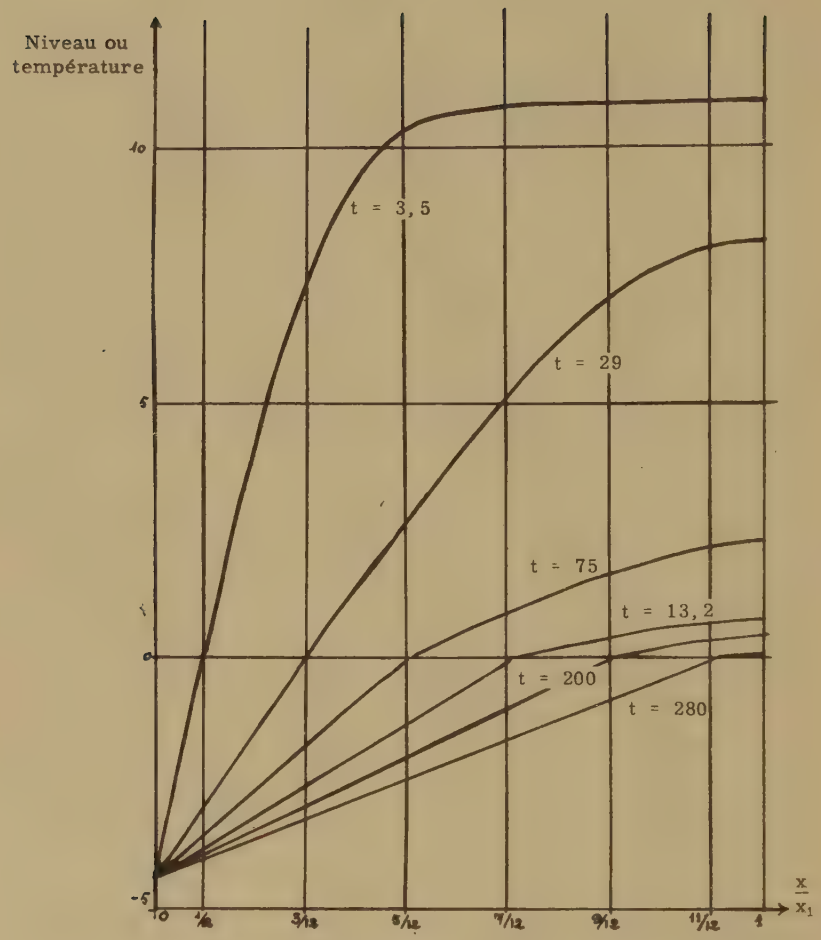


FIGURE (8 - 2c)

mules mathématiques. Nous nous contenterons d'arrêter l'attention du lecteur sur les points suivants :

a) Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que la courbe de congélation a une allure parabolique, avec :

$$x = b\sqrt{t} \qquad (8\text{-}2a)$$

où b n'est une constante qu'aux extrémités. Nous avons déjà expliqué pourquoi b est constant au début : c'est que les éléments d'ordre supérieur n'interviennent pas. Pour le début de la gla

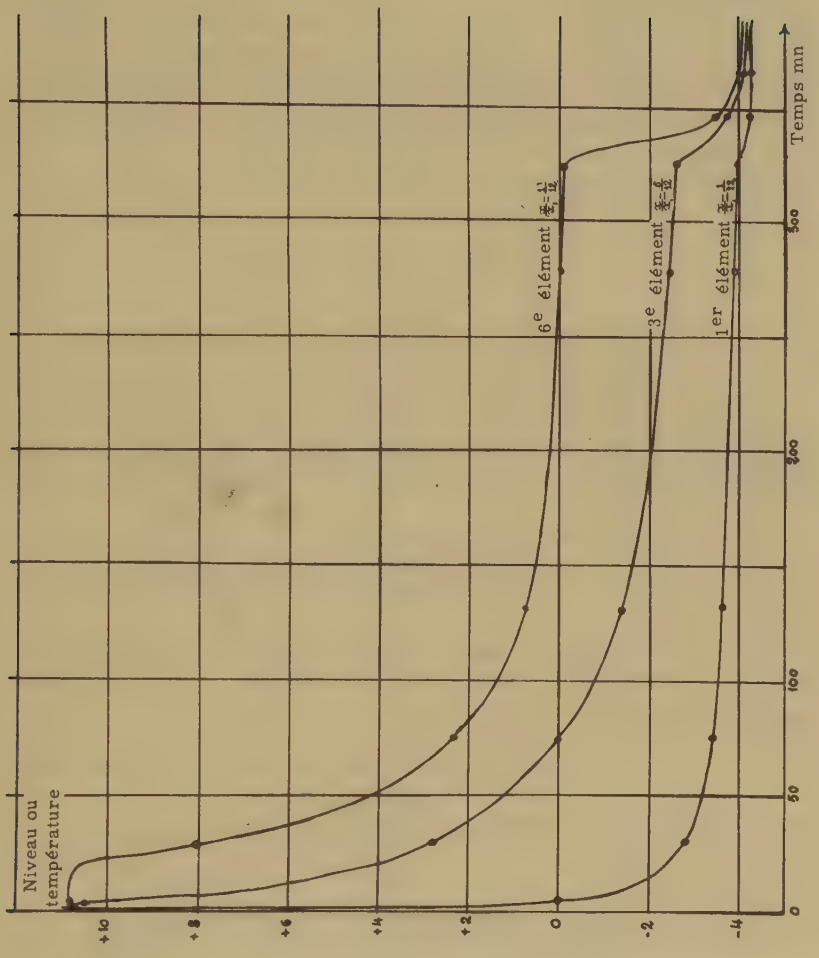


FIGURE (8 - 2d)

ciation, la valeur de b est celle des formules de NEUMANN en milieu semi-indéfini (équation 7-3w).

Qu'en est-il à la fin de la congélation ? L'inspection de la figure 8-2c nous donne la réponse : à partir de $t = 200$ la température de l'eau restante est proche de zéro. Vu la grande chaleur latente de fusion de l'eau, la quantité de chaleur représentée par l'aire comprise entre la courbe $\theta = f(x)$ au-dessus du zéro et le niveau zéro est insignifiante au regard de la quantité de chaleur cédée par l'eau en se gelant. On peut donc supposer la température

de l'eau partout égale à zéro, ce qui nous ramène à l'hypothèse de Stephan (Voir Ch. 7, n° 4), car dans un nombre quelconque d'éléments à niveau constant égal à zéro, le nombre d'éléments peut être fini ou infini sans que cela influe sur le mouvement de la chaleur dans les éléments à température (ou niveau) inférieur à la température de congélation, et l'on trouve pour b la valeur donnée par les équations de Stephan en milieu indéfini.

En conclusion, pour un « mur » fini, la congélation suit la marche :

$$x = b\sqrt{t}$$

où b est constant au début et à la fin de la congélation, avec pour valeur, au début, la valeur de la constante de Neumann, et, à la fin, celle, plus grande, de la constante de Stephan. En cours de congélation, b a une valeur intermédiaire. D'où il suit qu'en première approximation on pourra résoudre le problème de *congélation d'un mur fini* en prenant :

$$x = b\sqrt{t}$$

où b sera une valeur intermédiaire entre les deux constantes ci-dessus définies.

b) Il est à remarquer que, tant que dure la congélation, le régime de la chaleur dans la glace est pratiquement le régime permanent avec :

$$dq = + k \frac{\theta_m}{b\sqrt{t}} dt \qquad (8\text{-}3b)$$

où θ_m est la température minimum atteinte, c'est-à-dire la température extérieure.

Il en résulte, pour le début de la congélation et la fin :

$$Q = \frac{2k\theta_m}{b} \sqrt{t}$$

la quantité de chaleur perdue est, elle aussi, proportionnelle à la racine carrée du temps.

c) Si l'on compare les courbes au-dessus de zéro (figure 8-2c) avec les courbes de refroidissement du mur sans congélation [3], on trouve qu'elles sont comparables, mais que les abscisses se retrécissent ; le rétrécissement suit la loi :

$$x = b\sqrt{t}$$

(3) Voir par exemple Fabry, p. 88, fig. 13.

Le calcul nous a montré que l'on peut utiliser la formule connue [4] :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\pi\frac{x'}{a}\right) + \frac{1}{3}e^{-9\frac{t}{\tau}} \sin\left(3\pi\frac{x'}{a}\right) + \dots\right]$$

à condition de prendre pour x' la fonction suivante du temps :

$$x' = x - b\sqrt{t}$$

avec :

$$a = 2(x_1 - b\sqrt{t})$$

$$\tau = \frac{4(x_1 - b\sqrt{t})^2}{\pi^2 h}$$

ce qui nous permet donc de calculer ici, h, connaissant τ_0.

Inversement connaissant h, nous pourrons avoir τ.

Il résulte de tout cela que nous avons démontré *physiquement* cette proposition extrêmement importante pour tous les problèmes de ce genre :

Un refroidissement avec changement d'état peut être traité comme la superposition de deux problèmes :

1° Un problème de régime *semi-permanent*, c'est-à-dire correspondant à un régime de la forme :

$$dq = \frac{ks}{x_0}\theta_m\, dt$$

où θ_m est la température ambiante froide mais où x_0 est l'abscisse variable du point de solidification avec :

$$x_0 = b\sqrt{t}$$

b est une constante dans un mur semi-indéfini, et une moyenne ou une variable dans un mur fini.

2° Un problème de refroidissement avec source froide à température constante, cette source froide se déplaçant suivant la même loi :

$$x_0 = b\sqrt{t}$$

avec les mêmes équations que les équations du refroidissement avec source froide fixe, mais en y remplaçant l'épaisseur du mur et les abscisses par un fonction du temps qui dépend de l'avancée de la source froide, soit :

pour l'épaisseur du demi mur, au lieu de x_1 on a :

$$x'_1 = x_1 - x_0$$

et pour abscisses, au lieu de x on a :

$$x' = x - b\sqrt{t}$$

(4) Fabry, p. 87.

Nous voyons comment les analogies hydrauliques nous ont permis de démêler un peu, et de façon simple, un problème fort compliqué.

Pour les problèmes de réchauffement les résultats sont identiques.

Pour les problèmes de changement d'état quelconque, les résultats que nous avons tirés de la congélation demeurent valables.

Quelle que soit la substance envisagée, pour un « mur », lorsqu'une *phase nouvelle* apparaît dans cette substance à la suite d'un changement de température, cette phase forme d'abord une phase infiniment mince d'épaisseur dx où s'établit de ce fait un régime défini par $dq = ks \frac{d\theta}{dx}$, c'est-à-dire un régime *semi-permanent*. Cette plaque ne s'accroît qu'assez lentement, et le régime *semi-permanent* subsiste de ce fait.

Il est évident qu'il en serait autrement dans le cas d'une solidification (ou liquéfaction) brutale. De même il est normal qu'il s'établisse dans la *phase ancienne* un refroidissement à forme habituelle puisqu'à la séparation de phase la température reste constante. Mais comme la surface de séparation des phases se déplace — asez lentement en l'hypothèse —, à la la forme habituelle du refroidissement doit se superposer un resserrement des abscisses et des épaisseurs.

4. — Valeur des diagrammes

Pour les phénomènes relatifs au changement d'état, un diagramme n'est pas universel, pour deux raisons :

1° Quand dans un même mur on prend des conditions aux limites différentes, il n'y a généralement pas similitude : alors en effet la température de changement d'état n'est généralement pas située de façon semblable par rapport aux températures extrêmes.

2° Soit y_1 la hauteur représentant un degré dans l'eau liquide et w la longueur du tube horizontal ; en supposant que le tube vertical représentant l'eau et le tube horizontal représentant la chaleur latente sont de même diamètre, on doit avoir :

$$\frac{w}{y} = 79{,}7 \cong 80$$

quelle que soit la capacité de l'élément envisagé puisque la quan-

tité de chaleur emmagasinée par élévation de température est, pour un degré, 80 fois moins forte que la quantité de chaleur emmagasinée par le même élément pour sa fusion.

Il en résulte une condition entre l'épaisseur du mur (capacité calorifique) et l'échelle des températures, qui n'est plus quelconque. Dans le problème tel que nous l'avons traité au numéro précédent, la chaleur latente de fusion n'intervient que pour la valeur de b.

Quant aux autres considérations sur les diagrammes, elles conservent leur valeur.

CHAPITRE IX

APPAREILLAGES HYDRODYNAMIQUES COMPLEXES

1. — Représentation de chaleurs spécifiques et conductivités variables

Les réalisations exposées jusqu'ici sont simples. On peut supposer des cas *plus complexes*. La *chaleur spécifique* et la *conductivité* sont généralement des *fonctions de la température*. Nous avons déjà montré qu'un changement de conductivité thermique peut être figuré par un changement de capacité accompagné d'un changement d'échelle pour les niveaux. Tout revient donc à un chanment de capacité.

Moore [1] avait déjà prévu d'incliner les éléments verticaux pour faire varier leur section horizontale, ce qui suppose qu'on manipule les éléments verticaux. La solution la plus générale, automatique, consiste à établir des éléments verticaux de profil étudié, comme l'a fait Coyle pour son analogie pneumatique [2]. Pour les analogies hydrodynamiques le calcul est facile, puisqu'il suffit de donner aux éléments verticaux une section proportionnelle à la capacité hydrodynamique. Comme Coyle, on peut utiliser pour cela des éléments en tôle de laiton composés de deux rubans AB et CD (fig. 9-1a) soudés entre deux faces planes P et Q. Le profil d'un des rubans, AB par exemple, est courbé suivant un profil $f(\theta)$ calculé pour donner la variation de la capacité en fonction du niveau.

A cet élément non transparent sera adjoint un tube vertical transparent servant d'indicateur de niveau, comme il a été fait pour la représentation du mur de glace.

(1) Moore I.
(2) Coyle I et II.

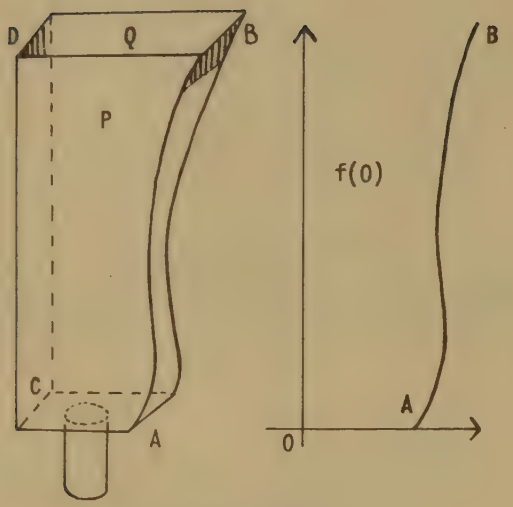


Figure (9-1a)

2. — Changement d'état

Tout problème avec changement d'état pourra être représenté et étudié comme nous l'avons fait pour le « mur de glace ». Des perfectionnements peuvent être apportés à la méthode, en limitant la hauteur d'injection d'eau. Cependant les résultats obtenus avec un appareillage relativement rudimentaire ont été excellents, avec une injection d'eau répartie sur plusieurs millimètres de hauteur.

Les analogies hydrodynamiques nous montrent que l'introduction de la chaleur latente de fusion revient à agrandir considérablement la capacité thermique au niveau de la température de fusion par un accroissement de capacité très grand, mais fini, sur une hauteur très petite mais finie de l'échelle des températures. On peut ainsi aboutir à des équations homogènes.

3. — Production interne de chaleur — Pertes

Pour figurer une production interne de chaleur dans un élément, il suffit d'injecter dans l'élément hydrodynamique correspondant une quantité d'eau déterminée.

Ainsi, pour figurer une production constante de chaleur, indépendante de la température, nous avons branché sur l'élément hydrodynamique une arrivée d'eau à débit constant. Pour obtenir

ce débit invariable, nous avons utilisé, à travers une résistance hydraulique appropriée, l'eau d'un réservoir à grande pression; au regard de cette pression, les petites fluctuations dans les niveaux de l'appareil sont sans influence.

Pour figurer une perte proportionnelle à l'excès de température sur une température donnée θ_0, il nous a suffi de mettre l'élément hydrodynamique en communication avec un réservoir inférieur à niveau constant y_0 représentant θ_0, par l'intermédiaire d'une conductance hydrodynamique représentant la conductance thermique responsable de la perte.

Et ainsi pour tous les cas.

4. — Problèmes avec dilatation

Formellement, la dilation d'un solide revient à un changement de dimensions et de propriétés physiques. Par le fait de la dilatation, un même élément, formé par une quantité de matière constante, change de position, de dimension, de chaleur spécifique, de conductivité.

Pour un calcul thermodynamique aux différences finies, on aura donc des éléments où variera la chaleur spécifique, et entre les éléments, des résistances variables. Hydrauliquement, ces variations pourront être représentées *uniquement* par des variations dans la capacité hydraulique des éléments verticaux, avec variation de l'échelle des niveaux.

5. — Conditions aux limites complexes

Les conditions aux limites traitées dans notre travail sont relativement simples : isolement du tube de flux ou mise en communication des extrémités avec des niveaux constants. On peut envisager des conditions plus compliquées. Par exemple, on réalisera une source terminale sinusoïdale par entraînement mécanique du réservoir correspondant, ou par tout autre artifice.

6. — Représentation de tubes de flux infiniment longs

La méthode hydrodynamique nous donne une solution simple pour les *chemins thermiques finis,* plus faciles à représenter matériellement que les *chemins indéfinis.* C'est même en cela que réside

son intérêt car, pratiquement, la plupart des problèmes qui se posent au physicien ou à l'ingénieur sont des problèmes relatifs à un système fini.

On peut cependant passer d'une représentation finie à une représentation de chemin indéfini grâce aux quatre remarques suivantes :

1° Nous avons vu (Chap. 4, n° 3 ; Chap. 5, n° 4 ; surtout Chap. 7, n° 2 et Chap. 7, n° 3a) que les *états premiers* d'un solide *fini* s'établissent comme dans le *solide indéfini. Pratiquement,* les éléments d'ordre élevé sont sans influence sur les premiers éléments pertubés, *au début d'une pertubation thermique.*

2° Certains états *pénultièmes* sont semblables dans le solide fini et dans le solide indéfini, par exemple la fin de la congélation d'une épaisseur finie et la marche de la congélation dans un mur indéfini pour la même épaisseur de glace (Chap. 7, n° 3a).

3° On peut toujours *grouper certains éléments* d'une représentation hydrodynamique en un seul, à condition de remplacer les résistances par une résistance qui en soit la somme. Pour représenter les *derniers éléments* d'un chemin indéfini, on sera donc amené à employer un seul élément de capacité infinie, relié aux précédents par un tube de *résistance infinie,* ce qui revient à isoler le chemin en ce point. Les éléments pénultièmes pourront être groupés à leur tour en un réservoir de *grande capacité* relié aux précédents par une résistance de *grande valeur.* Pour avoir donc la représentation d'un solide indéfini avec une approximation suffisante, il suffira de connecter la fin du chemin à étudier avec un réservoir d'assez grande capacité, à l'aide d'un tube capillaire très résistant calculé en conséquence.

4° On peut aussi établir des courbes pour des chemins de plus en plus longs, et extrapoler : en effet les courbes des chemins finis tendent asymptotiquement aux courbes des chemins indéfinis lorsqu'on fait croître la longueur des chemins.

7. — Représentation à 2 ou 3 dimensions

Les analogies hydrauliques permettent une étude des problèmes quelconques à *deux dimensions* par la construction d'un réseau hydraulique à deux directions, comme on le fait pour les autres analogies [3]. On peut traiter ainsi des problèmes à flux variable en direction, ou obtenir la répartition des isothermes sur une surface dans le cas de flux à direction stable.

(3) Laclémandière, p. 120, Coyle I et II, etc...

Pour l'étude d'un milieu à *trois dimensions,* on peut également concevoir un réseau à mailles cubiques [3]; mais cela suppose une assez grande complication de montage, cependant toujours réalisable. L'emploi de l'analogie électrique est plus commode dans ce cas, sauf pour les problèmes où interviennent les changements de capacité. *On peut même envisager une thermodynamique à plus de trois dimensions.*

8. — Représentation des milieux a contexture asymétrique [4]

Pour la représentation de la marche de la chaleur dans les milieux à contexture asymétrique on emploiera un appareillage à deux ou trois dimensions, avec asymétrie dans la répartition des résistances ou des capacités. S'il y a permanence des lignes de flux, on pourra étudier à part chaque ligne de flux comme un chemin thermique simple, qu'on peut toujours supposer connecté avec les lignes de flux voisines par des lignes isothermes; ces dernières n'occasionnant aucun transfert de chaleur peuvent être supprimées de la représentation. Dans ce cas, si les surfaces isothermes ne sont pas homocentriques ou homofocales, les chemins thermiques ne seront pas rectilignes; il y aura marche rotatoire ou « tourbillonnaire » de la chaleur.

9. — Méthode générale d'obtention de solutions numériques exactes

L'analogie hydraulique ne permet pas l'obtention directe de *solutions précises* puisque par définition elle utilise des *différences finies.* Mais la discussion mathématique du Chapitre 6 et l'inspection des courbes (6-9a) et (6-9b) permettent de déduire une méthode générale d'obtention des solutions précises. En faisant varier le nombre n des éléments hydrodynamiques, on obtient des solutions de plus en plus précises, qui tendent *asymptotiquement* vers la solution exacte. Il suffit donc de quelques expériences pour pouvoir prévoir la solution exacte pour n infini.

Nous retrouvons pour la recherche d'une *solution exacte,* ce que nous avons dit au n° 6 pour la recherche de la solution dans le *solide indéfini.* C'est là une méthode tout à fait générale.

Ainsi, on pourra se servir d'un calcul analogue à celui du

(4) Voir par exemple Boussinesq II, p. 134.

chapitre 6 pour prévoir *asymptotiquement* la valeur exacte des premiers éléments — bien souvent les seuls important — de la série qui représente les états de la température.

10. — Emploi de liquides autres que l'eau

Pour nos expériences nous avons employé comme liquide l'eau, qui est très commode et ne nécessite pas de précautions spéciales. Mais on peut employer d'autres liquides, dont la viscosité peut permettre l'emploi de capillaires plus gros ou plus courts, ou modifier heureusement la vitesse des expériences. Ainsi on peut employer la glycérine, comme on fait dans les expériences dérivant de l'analogie de Hele-Shawe [5] ; Coyle emploie une huile minérale.

On possède actuellement toute une gamme de liquides pouvant répondre à tous les desiderata.

11. — Enregistrement graphique

L'appareillage est compatible avec un enregistrement graphique. Il suffit pour cela de brancher à la base de chaque tube vertical un manomètre enregistreur, puisque la pression est proportionnelle à la hauteur de liquide dans l'élément. On pourrait obtenir ainsi des enregistrements très précis.

(5) *Cf.* Granier, p. 226, etc...

CHAPITRE X

NOTIONS SUGGÉRÉES PAR LES ANALOGIES HYDRODYNAMIQUES

Les analogies hydrodynamiques nous permettent de définir de façon claire *quelques notions* de grand intérêt pour les problèmes de la chaleur.

1. — Notion de chemin thermique

La notion de chemin thermique est assez employée par les auteurs [1]. Mais les analogies hydrodynamiques nous en donnent une *image*. Un *chemin thermique*, avons nous vu, est constitué par un tube de flux assez fin pour être considéré comme linéaire. Un *chemin hydraulique* constitué par les éléments verticaux et leurs tubes capillaires figure hydrodynamiquement ce chemin thermique.

Or, immédiatement, les chemins hydrodynamiques nous enseignent que deux chemins thermiques tels que :

$$\frac{k_1 S_1}{dx_1} = \frac{k_2 S_2}{dx_2} \qquad (10\text{-}1a)$$

sont représentés par les *mêmes tubes capillaires*, l'expression (10-1a) indiquant que les résistances thermiques homologues sont égales. Si avec cela les capacités des éléments homologues dans l'un et l'autre chemin sont égales, c'est-à-dire si :

$$\gamma_1 S_1 dx_1 = \gamma_2 S_2 dx_2 \qquad (10\text{-}1b)$$

elles seront représentées par des *éléments verticaux identiques*. On peut donc dire que les *deux chemins* sont *identiques*.

(1) *Cf.* Coyle I : « Heat-flow paths ».

Deux chemins identiques, puisqu'ils sont représentés par *le même* chemin hydrodynamique ont à la fois des *équations identiques* pour les mêmes états de *température*, et des *débits identiques*.

Les conditions (10-1a) et (10-1b) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

$$k_1 \gamma_1 S_1^2 = k_2 \gamma_2 S_2^2 \qquad (10\text{-}1c)$$

En particulier, pour des tubes de flux dont les sections homologues sont égales on a :

$$k_1 \gamma_1 = k_2 \gamma_2 \qquad (10\text{-}1e)$$

Nous proposons d'appeler le produit $k\gamma$ « *facteur d'identité thermique* » et de le représenter par le symbole j. Ce facteur intervient dans l'établissement des températures de contact [2], dans le cœfficient d'échange par convection d'un fluide laminaire [3], dans le partage des flux pour le « double mur » [4], etc...

En *régime permanent*, les capacités n'interviennent pas et il n'y a pas d'équation de la chaleur en fonction du temps. Il sera utile de considérer le *débit de chaleur* des chemins thermiques. C'est ce débit qui compte dans maints problèmes d'isolement. Nous sommes amenés à dire que deux chemins thermiques sont *équivalents* s'ils ont le même débit. Or deux chemins hydrauliques ont même débit s'ils ont la même résistance. Donc il en est de même de deux chemins thermiques. Il faudra donc que :

$$\int \frac{dx_1}{k_1 S_1} = \int \frac{dx_2}{k_2 S_2} \qquad (10\text{-}1f)$$

ce qui se vérifiera en particulier si :

$$\frac{dx_1}{k_1 S_1} = \frac{dx_2}{k_2 S_2} \qquad (10\text{-}1g)$$

et, pour des tubes de flux dont les sections homologues sont égales :

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{k_1}{k_2} \qquad (10\text{-}1k)$$

les longueurs (ou les épaisseurs de mur) doivent être proportionnelles aux cœfficients de conductivité.

(2) Fabry, p. 101.
(3) Fabry, p. 152. Il donne, au lieu de $\sqrt{k\gamma}$ le paramètre $= \frac{k}{\sqrt{h}}$.
(4) Vernotte V.

En régime variable, il est quelquefois utile de considérer deux chemins thermiques qui, avec des conditions aux limites identiques, reproduisent la même loi de température, *sans pour cela qu'il y ait même débit.* Nous disons que ces chemins thermiques sont *thermiquement semblables.* Le paragraphe n° 4 nous donne immédiatement la condition : deux expériences P_0 et P_1 donnent les mêmes courbes à partir d'un même état initial si le quotient $\frac{n^2}{m}$ reste constant c'est-à-dire si les longueurs sont proportionnelles à la racine carrée de la diffusivité, quelles que soient les sections des tubes de flux.
on a :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \sqrt{\frac{\bar{h}_2}{h_1}} \qquad (10\text{-}1l)$$

la condition est la même que (10-1c). Pour deux chemins thermiques *semblables* de même section l'égalité du facteur j entraîne *l'identité* ce qui justifie le nom que nous lui avons donné.

Si deux chemins thermiques x_1 et x_2 sont thermiquement semblables, nous écrirons de façon abrégée :

$$x_1 \hat{=} x_2 \qquad (10\text{-}1m)$$

S'ils sont identiques, nous écrirons :

$$x_1 \ddot{=} x_2 \qquad (10\text{-}1n)$$

2. — Problèmes des maquettes

Les notions précédentes nous permettent de traiter de façon simple les problèmes relatifs aux *maquettes.* Nous appelons *maquette* ou *modèle* la représentation d'un *objet* ou *type, généralement* construite à l'échelle géométrique réduite; le rapport de similitude géométrique, ou dimensionnel, des dimensions linéaires de la *maquette* à celle du *type* sera appelé R.

Le problème à résoudre en fait est celui-ci :

Problème.

Quelles caractéristiques doivent avoir deux milieux géométriquement semblables, avec des conditions-limites constamment identiques en des points géométriquement homologues, pour que, la *distribution des températures* étant primitivement *la même* dans les deux milieux, *elle le reste* constamment.

La réponse est immédiate : il doit y avoir *similitude thermique*. Donc, pour deux chemins homologues x_1 et x_2 on a :

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \mathrm{R} \tag{10-2a}$$

En d'autres termes, les diffusivités doivent être entre elles comme le carré du rapport de similitude géométrique. S'il n'en était pas ainsi, par exemple si l'on avait :

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{nh_1}{h_2}} \tag{10-2b}$$

ou encore :

$$\sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{n}} \tag{10-2c}$$

la diffusivité h_1 serait n fois trop petite, le mouvement de la chaleur dans le modèle serait n fois plus lent. Le modèle pourrait encore servir de maquette à condition de multiplier par n tous les temps relatifs aux modifications thermiques.

Relation entre les débits de chaleur dans une maquette et les débits dans le type.

Les débits de chaleur dans une maquette sont régis par la loi de Fourier :

$$dq_1 = k_1 \mathrm{S}_1 \frac{d\theta_1}{dx_1} dt \tag{10-2d}$$

De même, dans le type, le débit correspondant est :

$$dq_2 = k_2 \mathrm{S}_2 \frac{d\theta_2}{dx_2} dt \tag{10-2e}$$

Il en résulte que, si l'on veut avoir $d\theta_1 = d\theta_2$ (condition de similitude thermique) on doit avoir :

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx_1}{dx_2}} = \mathrm{R} \frac{k_1}{k_2}. \tag{10-2f}$$

La condition (10-2f) peut s'écrire équivalemment :

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \mathrm{R} \frac{k_1}{k_2} = \mathrm{R}^3 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{10-2g}$$

Les débits de chaleur dans la maquette doivent être entre eux comme le produit du rapport de similitude géométrique par le rapport des conductivités thermiques. Il en sera ainsi pour les quantités de chaleur mises en mouvement par le simple jeu des

lois du refroidissement. Il faudra tenir compte de cette relation pour les quantités de chaleur à introduire dans la maquette (chauffage, production interne de chaleur ou de froid, etc...)

Si l'on veut que les quantités de chaleur mises en jeu soient *les mêmes*, l'équation (10-2g) nous fournit une condition entre les conductivités et les chaleurs spécifiques par unité de volume :

$$\frac{k_1^3}{k_2^3} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \qquad (10\text{-}2h)$$

ce qui peut se réaliser avec certaines substances.

Les *modèles analogiques* doivent obéir aux mêmes conditions pour pouvoir représenter analogiquement des *prototypes d'un autre genre*. Il faut évidemment, comme nous l'avons fait, employer des notations homogènes qui conduisent aux mêmes expressions.

On peut donc dire dans ce sens qu'un *chemin hydraulique* l est la *maquette* d'un *chemin thermique* x à condition que le chemin l soit semblable au chemin x, ce que nous écrirons :

$$\widehat{l \varnothing x} \qquad (10\text{-}2i)$$

ou sans autre notation, $l \varnothing x$.

Ce qui requiert, avec les notations employées :

$$\frac{x}{l} = \sqrt{\frac{h}{H}} \qquad (10\text{-}2j)$$

où H est la diffusivité thermique égale à $\frac{K\sigma}{C_1}$, C_1 étant la capacité hydraulique relative à l'unité de longueur de chemin (longueur nominale de tube capillaire). Il faut tenir compte du fait que σ varie quand les dimensions varient.

On peut de la même façon définir des chemins hydrauliques identiques et des chemins équivalents.

3. — Géométrie thermique

La notion de chemin thermique nous a permis de résoudre des problèmes aboutissant à des formes géométriques. On a comparé quelquefois cette géométrie à l'optique géométrique. Elle en diffère cependant foncièrement ; car la chaleur *diffuse* dans le support qui *lui est offert*, ce qui n'a pas lieu pour le rayon lumineux classique. Cependant, *chaque fois qu'on peut connaître des lignes de flux*, on peut prévoir les effets thermiques et essayer de les adapter à des conditions posées. Cette géométrie est surtout

efficace pour les problèmes d'*équirépartition de la chaleur* ou des températures dans une enceinte. Elle nous a conduit à effectuer des calculs de lentilles thermiques, de surfaces d'équirépartition thermique, etc...

Pour tous les calculs, il est extrêmement important de *bien définir les conditions limites.* Il ne peut y avoir similitude de chemins thermiques qu'avec des *conditions limites identiques.* Quand le débit de chaleur modifie ces conditions limites, il faudra pour conserver la similitude avoir des *débits identiques,* c'est-à-dire utiliser des chemins thermiques identiques. A cet effet, les analogies hydrodynamiques nous sont d'un grand secours en nous enseignant que, dans un chemin thermique morcelé, on peut grouper plusieurs éléments. On pourra donc équiparer un élément de capacité et de résistance donnée à un autre élément de même capacité mais de résistance inférieure, en adjoignant à ce dernier une *résistance supplémentaire sans capacité* (encoche, mauvais contact, etc...), et l'on réalisera ainsi deux éléments identiques.

A cette géométrie thermique peuvent se rattacher la notion *d'unité de chemin thermique,* de *somme de chemins thermiques* et de *vitesse de la chaleur.*

a) *Unité de chemin thermique.* En partant de l'équation (10-2a) on peut comparer un chemin x_p dans un milieu P à un chemin x_1 dans un milieu semblable P_1 de *diffusivité* $h = 1$.

On a :

$$\frac{x_p}{x_1} = (\sqrt{h_p}) \qquad (10\text{-}3a)$$

$$x_p = (\sqrt{h_p})\, x_1 \qquad (10\text{-}3b)$$

Dans le milieu P, le chemin qui correspond au chemin unité dans le milieu P_1 a pour valeur $\sqrt{h_p}$. *L'unité de chemin thermique dans le milieu P* est donc cette valeur $\sqrt{h_p}$.

b) *Somme de chemins.*

Soient :

$$x_1 \mathrel{\widehat{=}} x'_1 \qquad (10\text{-}3c)$$

$$x_2 \mathrel{\widehat{=}} x'_2 \qquad (10\text{-}3d)$$

on a aussi :

$$x_1 + x_2 \mathrel{\widehat{=}} x'_1 + x'_2 \qquad (10\text{-}3d)$$

si le rapport :

$$R = \sqrt{\frac{h}{h'}}$$

est le même pour les deux tronçons. En effet cela revient à cons-

truire *par pièces* une maquette d'un prototype déterminé, avec les mêmes rapports de similitude, ou encore à représenter le prototype par des éléments hydrodynamiques répondant au même calibrage. Mais il n'en sera pas ainsi si le calibrage de la maquette n'est pas le même dans les deux tronçons.

On peut donc dire que :

— *La condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs chemins élémentaires constituent un chemin semblable à un chemin type, c'est que chaque élément soit avec son type dans le même rapport de similitude thermique et géométrique.*

De même pour les chemins identiques, l'identité étant un cas particulier de la similitude.

La condition n'est *nécessaire* que lorsque l'on recherche une similitude ou une identité *exacte, c'est-à-dire une répartition identique* des températures *en tous les points* homologues des chemins thermiques, avec une *infinité* de points. Il n'en est plus de même, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, lorsqu'on découpe le chemin en éléments finis, si l'on groupe convenablement les éléments, et si l'on s'en tient à une similitude ou une identité relative.

— Quant aux *chemins équivalents,* comme seule la résistance thermique intervient, et la résistance est additive, il suffit que la somme des résistances des éléments du premier chemin soit égale à la somme des résistances des éléments du deuxième, pour que les deux chemins soient équivalents.

c) *Vitesse de la chaleur dans un milieu.* Pour deux *chemins thermiques semblables* x_1 *et* x_2 respectivement dans un milieu P_1 et P_2 de diffusivité h_1 et h_2, on a

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \qquad (10\text{-}3f)$$

et :

$$x_1 \mathrel{\widehat{=}} x_2$$

autrement dit, *la même perturbation* parcourt x_1 dans le milieu P_1 quand elle parcourt x_2 dans milieu P_2, si l'on prend la même échelle pour les temps. On peut donc dire que le rapport *des vitesses* du *même phénomène* thermique en P_1 et en P_2 est :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \qquad (10\text{-}3g)$$

— Ce rapport ne dépend pas de *la forme* de la pertubation mais *uniquement des diffusivités* des milieux. Il caractérise le milieu et a quelque analogie (imparfaite) avec l'indice du milieu.

Si l'on considère cet indice n comme l'inverse de la vitesse, on a :

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \qquad (10\text{-}3h)$$

en particulier si l'on pose $n = 1$ pour $h = 1$, on obtient :

$$n = \frac{1}{\sqrt{h}}. \qquad (10\text{-}3i)$$

— *Les analogies hydrodynamiques* nous permettent de pousser un peu plus loin. On sait que le temps mis pour arriver au même état de température dans deux milieux semblables est proportionnel au carré des distances et inversement proportionnel à la diffusivité (Voir chap. 4, n° 4).

$$t = \frac{1}{\alpha}\,\frac{x^2}{k} \qquad (10\text{-}3j)$$

où x dépend, pour la propagation d'une perturbation simple, de la forme du milieu (coefficient de forme) ; or la vitesse de propagation peut s'écrire :

$$v = \frac{x}{t} \qquad (10\text{-}3k)$$

d'où :

$$v = \alpha\,\frac{k}{x}. \qquad (10\text{-}3l)$$

Cette dernière expression nous apprend que la vitesse est d'autant plus faible que le chemin parcouru par la perturbation est plus grand. Il y a *amortissement et étalement*.

Ces équations sont fort utiles en pratique, parce qu'elles permettent des mesures de diffusivité par simple comparaison des temps de propagation.

4. — Régime semi-permanent

Dans le problème du mur de glace et dans le cas de la congelation, la température dans la phase glace suit une loi sensiblement rectiligne, *comme dans un régime permanent*. Mais le point à température zéro, source chaude, se déplace. Les courbes données par les analogies hydrauliques nous fournissent donc des exemples de régime thermique à variation lente, pouvant être traités comme des cas de régime permanent. Nous avons appelé ce régime du nom de semi-permanent (5). Tout processus thermique ou hydrodyna-

(5) On pourrait aussi employer le terme « quasi-permanent ».

mique peut être considéré comme une juxtaposition de régimes semi-permanents; c'est le principe qui se trouve à la base de nombreuses méthodes auxiliaires de calcul. Il est intéressant de rapprocher cette remarque de celle, faite depuis longtemps, que, dans le cas de constance des conditions limites et de production interne de chaleur, l'état thermique est toujours asymptotiquement permanent de façon effective [6]; de même, que si les conditions limites varient périodiquement, l'état thermique tend asymptotiquement à cette périodicité [7].

(6) Boussinesq I, p. 189 et sq.
(7) Boussinesq I, p. 206 et sq.

CHAPITRE XI

LES ANALOGIES HYDRODYNAMIQUES, INSTRUMENT DE DÉMONSTRATION ET DE VÉRIFICATION

1. — Forme des solutions de l'équation de la chaleur

Les analogies hydrodynamiques montrent de façon visuelle en quelque sorte, comment se forme la solution du problème de la chaleur dans un solide, et l'on voit surgir progressivement, avec un *sens concret*, les termes de la solution de FOURIER quand le nombre d'éléments croît indéfiniment (Chap. 6). D'autre part le calcul du mouvement de l'eau nous a conduit, *toujours de façon concrète*, à considérer la solution comme donnée par un système linéaire de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= A_1 z_1 + B_1 z_2 \ldots \\ \frac{dz_2}{dt} &= A_2 z_1 + B_2 z_2 \ldots \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}1a)$$

d'où la forme des solutions particulières :

$$z_p = \Sigma \lambda\, e^{-\omega t} \quad (11\text{-}1b)$$

avec, pour déterminer ω, une équation du n^e degré donné par :

$$D = 0 \quad (11\text{-}1c) \text{ (Voir 6-3e)}$$

Les analogies hydrodynamiques *illustrent* ainsi les démonstration analytiques [1], quelquefois un peu arides. Elles permettent plus encore. En remplaçant dans les formules des quantités $d0$ infiniment petites par des quantités z *d'abord finies*, elles procurent une simplicité de forme qui permet des *démonstrations* faciles.

(1) BOUSSINESQ I, p. 231 sq, etc...

Les niveaux y, sommes des dénivellations z, sont aussi de la forme :

$$y_p = \Sigma A e^{-\omega t} \qquad \text{(11-1d)}$$

avec les mêmes exposants ω.

Or, les cœfficients A, B... de (11-a) dépendent de la forme et de la nature du millieu, ainsi que de la façon dont le tube de flux est raccordé avec l'extérieur [2]. Ils sont *indépendants de la forme des courbes de température.* Il en résulte que les exposants ω sont une *caractéristique* du mur considéré.

Par contre, en faisant $t = 0$ dans (11-1d), on obtient une fonction qui ne comporte plus la variable t,

$$y_p\,(t = 0) = \Sigma A \qquad \text{(11-1e)}$$

Les coefficients A sont fonction des abscisses x et sont déterminés par la *courbe initiale de températures.*

2. — Equation caractéristique des solides

La démonstration précédente ne se borne pas à un mur. En effet, *tout tube de flux* peut être représenté par un *chemin hydrodynamique.*

Tout chemin hydrodynamique peut être identifié *à un « mur »* de capacité et de résistance variables (ou à un « mur » avec une seule des deux constantes thermiques variables, comme nous l'avons établi au Chapitre 7 [3]. *Donc tout tube de flux* peut être identifié à un tube de flux *dans un mur,* et *toute somme de tubes de flux* à *un mur complexe.* Le problème de la sphère, du cylindre ou de tout autre solide se ramène au problème *du mur.*

Il en résulte *immédiatement* que les propriétés des chemins hydrodynamiques s'appliquent à *tout problème* de la chaleur lorsque les lignes de flux sont *constantes* en direction, ce que *nous supposons dans tout ce qui suit sauf mention expresse.*

Tout solide est donc assimilable à un *mur complexe.*

Dans tout solide les équations de la chaleur, le long d'une ligne de flux, sont de la forme :

$$\theta = \Sigma A\, e^{-\omega t} \qquad \text{(11-2a)}$$

où les ω sont *caractéristiques du solide* et indépendants de la forme initiale de la courbe des température, et où :

$$\theta = \Sigma A\,(x) \qquad \text{(11-2b)}$$

représente la courbe initiale des températures.

(2) Voir chapitre 6, n° 1 et 2.
(3) Les Théorèmes 7-6a et 7-6b sont applicables à n'importe quel solide.

Lorsque dans un solide les *lignes de flux sont mouvantes,* si ce mouvement est lent, ce qui est généralement le cas, on peut considérer l'état de la chaleur à un instant déterminé comme assimiliable à l'état thermique d'un mur que l'on peut appeler « *mur instantané* », et qui jouit des propriétés d'un mur dont les lignes de flux ne seraient plus indépendantes.

3. — Solides isolés

Quand un solide est isolé et soumis au seul refroidissement, chaque ligne de flux est assimilable à un chemin thermique isolé à ses extrêmités. Le système (11-1a) devient, d'après ce que nous avons établi au Chapitre 6, n° 2.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0 \\
z'_2 &= -2g_2z_2 + g_3z_3 \\
z'_3 &= -2g_3z_3 + g_2z_2 + g_4z_4 \\
z'_4 &= -2g_4z_4 + g_3z_3 + g_5z_5 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(11-3a)} \\
z'_{n-1} &= -2g_{n-1}z_{n-1} + g_{n-2}z_{n-2} + g_nz_n \\
z'_n &= -2g_nz_n + g_{n-1}z_{n-1} \\
y'_n &= -g_nz_n
\end{aligned}
$$

Les températures tendent vers une température moyenne fixe θ_0. Le point du chemin thermique qui se trouve à cette température θ_0 intermédiaire entre les extrêmes est fixe ou devient, assez rapidement, peu variable [4]. Si l'on fait la somme des z' jusqu'à ce niveau comme on l'a fait pour trouver l'équation (6-8e) on trouve comme conclusion que :

$$\frac{d}{dx}\, y(x=0) = 0$$

autrement dit, la forme de l'équation de la chaleur évolue très rapidement vers une forme sinusoïdale :

$$y' = \sum \frac{A}{m} e^{-\omega t} \sin mx$$

ou tout autre forme dont la dérivée est nulle pour $x = o$. *En d'autres termes, la courbe des températures en fonction des abscisses tend très vite à devenir horizontale au contact des isolants.*

(4) C'est ainsi que, dans le cas d'une pertubation instantanée, cette pertubation se propage en *s'étalant* et en se rapprochant de la température moyenne.

4. — Unicité des facteurs ω. Constante de temps d'un calorimètre

Nous avons vu qu'un solide est caractérisé par les exposants ω (plus exactement les facteurs ω des exposants ωt). Il reste à considérer qu'il n'y a qu'une seule série — infinie — de facteurs ω pour chaque solide. La proposition est démontrée *analytiquement*. Elle peut l'être *hydrodynamiquement*, en remarquant d'après le chapitre 6 que l'on arrive toujours à la même série quel que soit le mode de groupement des éléments hydrauliques.

Cette série de termes exponentiels, qui caractérise, aux cœfficients Λ près, le solide, est importante au point de vue pratique.

C'est ainsi que, pour un calorimètre on a une telle série :

$$\theta = a_1 e^{-\omega_1 t} + a_2 e^{-\omega_2 t} + \ldots + a_n e^{-\omega_n t} \qquad (11\text{-}4a)$$

où les termes a_1, a_2, a_n dépendent de la courbe initiale des températures, mais où les termes $e^{-\omega_1 t}$, $e^{-\omega_2 t}$ ... $e^{-\omega_n t}$ ... sont *une caractéristique du calorimètre*.

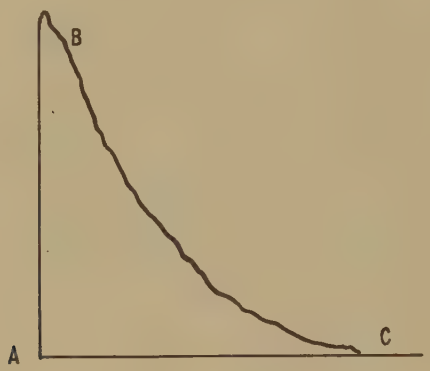


Figure (11-4a)

Nous avons montré au Chap. 6 que les termes en ω_2, ω_3, ... ω_n deviennent vite négligeables parce que les nombres ω_2, ω_3 ... deviennent vite très grands et généralement les cœfficients a_2, a_3 ... a_n sont petits. Il en résulte que dans tout solide, et donc dans tout calorimètre les états pénultièmes, qui sont asymptotiquement permanents, sont effectivement *exponentiels simplement*.

Dans un calorimètre, le mouvement de la chaleur prend rapidement la forme :

$$\theta = a_1 e^{-\omega_1 t}$$

Ainsi, une *pertubation thermique* enregistrée au microcalorimètre Calvet se présente comme une dent dont la partie finale BC est une courbe exponentielle (Fig. 11-4a) ; les courbes de refroidissement sont de même rapidement exponentilles. Si l'on mesure la valeur de ω_1 que l'on désigne habituellement par $\frac{1}{\tau}$, on trouve qu'elle caractérise le calorimètre. Le nombre τ est la *constante de temps* du calorimètre. L'expérience est en accord avec ce que nous avons établi [5].

De même, l'équation du calorimètre dans tous les cas, se ramènera à 2, 3 ou au maximum 4 termes qu'il n'est pas très difficile de calculer.

Du fait que les systèmes hydrodynamiques tendent à la solution exacte quelle que soit la façon dont sont partagés ou groupés les éléments on peut dans le calcul des 3 ou 4 termes nécessaires, répartir les capacités des éléments de manière à faciliter les calculs. D'autre part, on voit qu'un calcul analogue à celui du chapitre 6 pour 9 éléments est bien suffisant dans la pratique pour obtenir avec assez de précision les quatre premiers termes désirés.

A titre d'illustration nous donnons 2 formules pour le mouvement de la chaleur dans un mur homogène fini, d'épaisseur l_1.

a) Le mur est isolé, après établissement d'un régime permanent entre $+\theta_0$ et $-\theta_0$. La température tend vers zéro suivant la loi :

$$\theta = \frac{8\theta_0}{\pi^2}\left[e^{-\frac{\pi^2}{l_1^2}ht}\cos\left(\frac{\pi}{l_1}x\right) + \frac{1}{9}e^{-\frac{9\pi^2}{l_1^2}ht}\cos\left(\frac{3\pi}{l_1}x\right)\ldots\right] \qquad (11\text{-}4b)$$

(Voir chapitre 6, n° 8)

b) Le mur primitivement à θ_0 est plongé dans un milieu à température θ_1 qu'on peut pour simplifier prendre égale à zéro [6]. La loi est :

$$\theta = \frac{4\theta_0}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi^2}{l_1^2}ht}\sin\left(\frac{\pi}{l_1}x\right) + \frac{1}{3}e^{-\frac{9\pi^2}{l_1^2}ht}\sin\left(\frac{3\pi}{l_1}x\right) + \ldots\right] \qquad (11\text{-}4c)$$

on voit la permanence des exposants ωt pour le même solide.

(5) Les courbes calorimétriques de la figure (11-4a) peuvent s'interpréter comme la différence de deux exponentielles. *Cf.* : E. Calvet, F. Camia et Mlle M. Noël : « Sur l'emploi du microcalorimètre Calvet, etc... », *C. R. Ac. Sc.*, t. 242, pp. 2135-2137, 23 avril 1956.

(6) Voir Fabry, p. 87, Mc Adams, etc...

5. — Solutions polynomales

Il est des cas où, au début d'un mouvement de la chaleur, les solutions de Fourier ne sont pas toujours convergentes. Il faut alors avoir recours à une solution polynomale [7]. Le calcul des polynômes sera toujours facile d'après ce que nous avons exposé au chapitre 6, n° 11.

6. — Théorèmes faciles à démontrer par les analogies

On peut représenter deux ou n tubes de flux *contigus* dans un solide par deux ou n chemins hydrodynamiques parallèles, reliés entre eux, si l'on veut, par des tubes capillaires qui marquent les lignes isothermes.

On peut tout d'abord supposer qu'ils sont réunis par une extrémité à *une* source d'eau à débit constant et à l'autre extrémité à *un* niveau inférieur constant. Dans ce cas il s'établira un *régime permanent*.

L'appareillage hydraulique est un *modèle* des tubes de chaleur dans le solide. Nous avons vu que l'échelle des températures peut être choisie *arbitrairement*. En régime permanent la diffusivité n'intervient pas, et seul *le débit* figuré dépendra de l'échelle de températures choisie. La loi de Fourier montre que ce débit est proportionnel aux gradients de température et donc proportionnel à la différence de température entre la source et le niveau permanent inférieur, et inversement.

Il en résulte la démonstration immédiate des théorèmes suivants, quelquefois délicats à établir dans leur généralité.

Théorème 11-6a.

Dans un solide quelconque en *régime permanent, les mêmes lignes ou surfaces* représentent toujours des *isothermes* quelle que soit la puissance de la source chaude.

Cette proposition est démontrée par le fait que, pour des débits quelconques, on a le *même* emplacement pour les isothermes (on a la *même représentation hydrodynamique*).

On peut dire aussi que :

Dans un solide en *régime permanent* la forme des *lignes de flux* est unique et *caractérise le solide*.

(7) Vernotte III.

Théorème 11-6b.

La quantité de chaleur emmagasinée par un solide quelconque en régime permanent est *proportionnelle* à la puissance de la source chaude, pourvu que les chaleurs spécifiques soient indépendantes de la température.

En effet, d'après l'*analogie* de la représentation hydrodynamique les températures sont proportionnelles au débit, c'est-à-dire à la puissance de la source chaude. Les *quantités de chaleur retenues* étant elles-mêmes proportionnelles aux températures, le théorème est démontré.

Les mêmes théorèmes s'appliquent, avec la même démonstration à *n sources chaudes* entrant dans la même représentation hydrodynamique, c'est-à-dire avec la condition que leurs puissances respectives soient entre elles dans des rapports constants. De même pour *n' sources froides*. On peut également passer à un *nombre infini* de sources chaudes ou froides.

Théorème 11-6c.

Si dans un solide quelconque en régime permanent on *stabilise à* $\theta i + \Delta\theta$ *une enveloppe isotherme* primitivement à la température θi, pour la même puissance de la (ou des) source chaude, *toutes les températures intérieures* à l'enveloppe seront relevées de $\Delta\theta$.

En effet, dans la représentation hydrodynamique, tout ce qui précède l'élément représentatif de l'isotherme ne dépend que du niveau de ce dernier, qui peut être supposé évalué par rapport à un niveau zéro arbitraire.

Ces trois exemples, faciles à multiplier, montrent comment la *démonstration analogique, aussi rigoureuse* que la démonstration directe si *l'analogie est complète,* et souvent plus simple, peut être employée dans les analogies hydrodynamiques.

Etant donnée une *proposition* démontrée *dans un domaine,* la démonstration analogique consiste à transposer cette proposition dans le *domaine analogue,* grâce à l'*identité formelle* des équations. *Le domaine* de la démonstration analogique est celui où s'étend cette *identité.*

7. — Un exemple de calcul simplifié par les analogies

Nous avons vu dans le problème du mur de glace que le refroidissement pouvait être considéré comme un refroidissement

à forme normale dans l'eau, avec une épaisseur variable, et un régime permanent dans la glace.

Il en résulte que la formule de la température dans l'eau est donnée d'après (11-4c) par :

$$\theta_1 = \frac{4\theta_0}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi^2}{4(l_1-x_0)^2}ht}\sin\left(\frac{\pi(x-b\sqrt{t})}{2(l_1-x_0)}\right)+\ldots\right] \quad (11\text{-}7a)$$

où θ_0 est la température primitive de l'eau.

l_1 est l'épaisseur primitive d'eau qui se refroidit, supposée isolée du côté opposé au froid.

x_0 l'abscisse du point de congélation au temps t (source froide mobile)

θ_1 la température de l'eau

h_1 la diffusivité de l'eau.

et la température θ_2 de la glace est donnée par :

$$\theta_2 = \theta_e \frac{x}{x_0} \quad (11\text{-}7b)$$

où θ_e est la température froide extérieure.

Pour déterminer x_0, on peut employer l'équation déjà vue :

$$k_1\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - k_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = L\frac{\partial x_0}{\partial t} \quad (11\text{-}7c)$$

qui devient :

$$\frac{2\theta_0 k_1}{l_1-x_0}e^{-\frac{\pi^2}{4(l_1-x_0)^2}ht}\cos\left(\frac{\pi(x-x_0)}{2(l_1-x_0)}\right)+\ldots$$

$$-\frac{k_2\theta_e}{x_0} = L\frac{dx_0}{dt} \quad (11\text{-}7d)$$

Nous avons vu également qu'à la fin de la congélation du mur les premiers termes de (11-7d) sont négligeables, la quantité de chaleur détenue par l'eau *au-dessus de* 0° étant presque nulle.

On a donc :

$$-\frac{k_2\theta_e}{x_0} = L\frac{dx_0}{dt} \quad (11\text{-}7e)$$

ce qui donne, directement et par une simple intégration :

$$x_0 = \sqrt{\frac{-2k_1\theta_e}{L}}\sqrt{t} = b\sqrt{t} \quad (11\text{-}7f)$$

on a ainsi de façon immédiate la valeur approchée de la constante b qui ne s'établit autrement que par un calcul assez long.

CONCLUSION

1. — Les analogies hydrodynamiques rendent « visibles » les phénomènes thermiques

Les problèmes relatifs à la chaleur sont toujours assez difficiles à traiter dès qu'ils sortent des voies battues. En effet on ne trouve généralement rien de concret à quoi se raccrocher. Nous pensons avoir assez démontré, tout au long de cette Thèse, que les analogies hydrodynamiques matérialisent en quelque sorte ce fluide insaisissable qu'est la chaleur, et permettent de contrôler les hypothèses ou les approximations.

Nous terminerons ce sujet par un problème assez difficile à bien traiter en pratique, celui de la superposition des états de chaleur ou de diffusion.

— *Il est évident que deux sources de chaleur égales instantanées surgies au même point et en un même instant ajoutent leurs effets.* Car si dans un élément hydrodynamique on met au temps zéro une quantité d'eau double, il n'est pas difficile de voir que partout les effets sont doublés.

— *Si les deux sources simultanées ne sont pas superposées* mais *contiguës,* il est facile de voir que leurs effets sont additifs *assez loin d'elles.*

En effet, on peut prendre un élément hydrodynamique qui les comprenne toutes deux, et l'action de l'eau versée dans cet élément pour figurer les deux sources est double de l'effet obtenu en versant dans l'élément l'eau correspondant à une seule source. Nous savons que, sur un *grand nombre d'éléments,* un groupement de *quelques-uns* ne modifie pas beaucoup l'allure du mouvement de l'eau dans les autres.

— *Si, pour ces deux sources rapprochées,* on considère *l'entourage immédiat* il n'en est plus de même.

En particulier, dans l'espace intermédiaire, les effets ne s'ajoutent pas, sans quoi on pourrait arriver à une température supé-

rieure à celle des sources, ce qui est impossible analogiquement, d'après le second principe de la thermodynamique. Il est évident que si on met en communication deux éléments hydrauliques pleins d'eau par l'intermédiaire d'un élément vide, en aucun cas le niveau de ce dernier ne pourra être supérieur au niveau de chacun des deux autres.

Le principe de superposition est donc un principe qu'il faut manier avec une grande prudence.

— Par contre le *principe de réflexion* est exact [1], mais il faut bien l'entendre. On dit que deux sources égales S et S′ (Figure 12-1a) reviennent à *une source*, et à *une paroi* isolante P au milieu du chemin SS′.

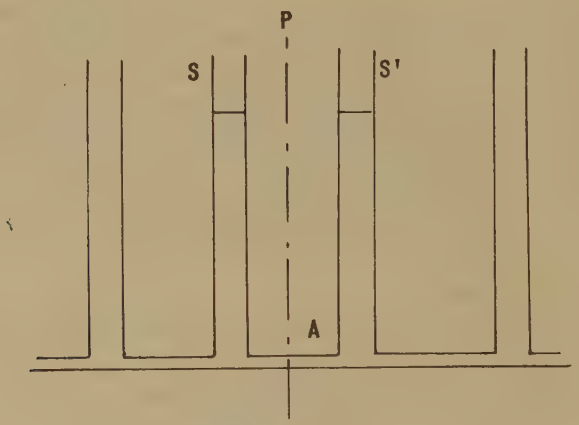


Figure (12-1a)

Ceci est vrai ; hydrodynamiquement, il y a symétrie par rapport à P; cette symétrie se conserve; les pressions en A sont égales dans les deux sens, il n'y a pas mouvement d'eau ; on peut établir un robinet en A et le fermer : rien ne sera changé au mouvement. Mais, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, il faut bien se garder de croire que les effets *isolés* de S et de S′ se sont superposés *additivement*, et qu'il y une véritable *réflexion* analogue à la réflexion des ondes lumineuses. Sans cela une source très proche d'une paroi produirait des pointes de température incompatibles avec le second principe de la thermodynamique. De même il faut bien se garder d'employer les mots « onde », « effet d'onde » sans bien définir ce qu'on veut entendre par là.

(1) Voir par exemple Duclaux, p. 11.

2. — Les analogies hydrodynamiques permettent de traiter des problèmes pratiquement difficiles à traiter autrement

Nous l'avons vu pour les problèmes de changement d'état, où l'on conçoit mal comment employer l'analogie électrique, et où les calculs sont extrêmement compliqués.

3. — Elles sont un instrument de calcul

Au point de vue calcul, elles offrent deux avantages :

a) elles fournissent un mode de calcul approché intermédiaire entre le calcul aux différences finies et le calcul différentiel proprement dit, *contrôlable sans cesse par l'expérience ;* mode de calcul qui prête à *simplification* et *démonstration.* Quelquefois même elles ont *directement valeur de démonstration* (2).

b) un montage hydrodynamique est un véritable *calculateur* apte à résoudre les équations linéaires du premier et du second ordre ; en établissant des liaisons entre *tous* les éléments verticaux à l'aide de résistances, ces dernières, si les capacités des éléments sont identiques, représentent à un facteur constant près, l'inverse des coefficients des équations.

Les analogies hydrodynamiques peuvent donc s'appliquer à un domaine bien plus vaste que celui de la chaleur : diffusion - filtration - magnétisme - électricité - exploitation des gisements pétrolifères, etc...

4. — Elles sont le complément des méthodes « topographiques »

Nous appelons « topographiques » les méthodes qui visent à obtenir la *topographie* des champs et aboutissent à une *carte* de lignes de flux. Les analogies hydrodynamiques, d'après la *forme* des tubes de flux, permet le calcul du mouvement de la chaleur chaque fois que les lignes de flux sont constantes.

(2) Moore s'est servi de même des analogies du bain de sable. *Cf.* Moore IV.

5. — Elles peuvent trouver place dans de nombreux laboratoires

Faciles à monter, peu coûteuses, d'une utilité que nous espérons avoir démontrée, elles trouvent place dans tout laboratoire de calorimétrie, de thermodynamique, de mécanique des fluides, et partout où l'on a à résoudre des équations semblables à celles de la chaleur.

Marseille, le 25 mars 1955.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 3

Chapitre préliminaire : Bibliographie 5

Chapitre I :

Les méthodes de solution du problème de la chaleur

1. — Les méthodes mathématiques 19
2. — Les méthodes auxiliaires 21
3. — La similitude 22
4. — Méthodes analogiques 22
5. — Les analogies hydrodynamiques 24

Chapitre II :

Etude préliminaire de l'appareillage

1. — Les divers éléments 27
2. — Description d'un élément 27
3. — Etude des capillaires .....
4. — Mesure pratique de la résistance d'un capillaire 33

Chapitre III :

Analogie hydrodynamique de la chaleur

1. — Mouvement de la chaleur dans un corps 35
2. — Chemin thermique et chemin hydraulique .. 36
3. — Loi et équation du mouvement dans un chemin hydraulique 36
4. — Correspondances et notations 38
5. — Capacité hydrodynamique 38
6. — Diffusité hydrodynamique 38
7. — Longueur nominale et longueur réelle des tubes capillaires 39
8. — Chemin hydrodynamique à nombre fini d'éléments 39

Chapitre IV :

Expériences sur des sujets classiques : *Problème du Mur*

1. — But du présent chapitre 43
2. — Figuration hydrodynamique du problème .. 43
3. — Résultats 45
4. — Utilisation des courbes 47

Chapitre V :

Expériences sur des sujets classiques : *Problèmes sphériques et cylindriques*

1. — Chemin thermique en coordonnées sphériques 51
2. — Représentation hydrodynamique 52
3. — Essai du montage 53
4. — Résultats : Cas d'une source interne — cas d'une source externe 54
5. — Utilisation des courbes 58
6. — Problèmes cylindriques. Cas général 61

Chapitre VI :

Calcul des courbes hydrodynamiques

1. — Equations générales 63
2. — Niveaux des tubes extrêmes 65
3. — Solution générale 67
4. — Application à un exemple particulier 68
5. — Calcul du précédent pour n = 9 70
6. — Calcul pour n = quelconque : remarques préliminaires 76
7. — Résultats 78
8. — Nombre infini d'éléments 80
9. — Comparaison des résultats 84
10. — Passage aux équations de la chaleur 89
11. — Moyens auxiliaires de calcul 90
12. — Conclusions 91

Chapitre VII :

Le Mur de glace

1. — Généralités 93
2. — Le problème 93
3. — Solution de Neuman 94
4. — Simplifications 98
5. — Analogie hydrodynamique du mur de glace 99
6. — Résistance variable en $f(\theta)$ 101
7. — Disposition pratique des tubes 103
8. — Calculs des sections. Dimensions adoptées 105
9. — Dispositifs annexes 106

CHAPITRE VIII :

Le Mur de glace : résultats expérimentaux

1. — Généralités 107
2. — Cas traité 107
3. — Interprétation des courbes 115
4. — Valeur des diagrammes 120

CHAPITRE IX :

Appareillages complexes

1. — Représentation de chaleurs spécifiques et conductivités variables 123
2. — Changement d'état 124
3. — Production interne de chaleur. Pertes 124
4. — Dilatations 125
5. — Conditions complexes aux limites 125
6. — Tubes de flux infiniment longs 125
7. — Représentation à 2 ou 3 dimensions 126
8. — Milieux à contexture asymétrique 127
9. — Méthode générale d'obtention de solutions exactes 127
10. — Emploi de liquides autres que l'eau 128
11. — Enregistrement graphique 128

CHAPITRE X :

Notions suggérées par les analogies hydrodynamiques.

1. — Chemin thermique : identité, similitude, équivalence 129
2. — Problème des maquettes 131
3. — Géométrie thermique 133
4. — Régime semi-permanent 136

CHAPITRE XI :

Les analogies hydrodynamiques, instrument de démonstration et de vérification

1. — Forme des solutions de l'équation de la chaleur 139
2. — Equation caractéristique des solides 140
3. — Solides isolés 141
4. — Unicité des facteurs ω. Constante de temps d'un calorimètre 142
5. — Solutions polynomales 144
6. — Théorèmes faciles à démontrer par analogie 144
7. — Exemple de calcul simplifié par les analogies 145

CHAPITRE XII :

Conclusions

1. — Les analogies hydrodynamiques rendent « visibles » les phénomènes thermiques 147
2. — Elles permettent de résoudre des problèmes pratiquement difficiles à traiter autrement .. 149
3. — Elles sont un instrument de calcul 149
4. — Elles sont le complément des méthodes « topographiques » 149
5. — Leur place au laboratoire 150

IMPRIMERIE LOUIS JEAN - GAP